Math. P.
591. m

Math. P.
591 m
Trentel

COMPENDIUM
ALGEBRAE
ELEMENTARIS,

QUOD

IN USUM

AUDITORUM SUORUM

EDIDIT

FRANCISCUS TRENTEL
IN ALMA UNIVERSITATE WIRCEBURGENSI
PROFESSOR MATHESEOS.

WIRCEBURGI,
TYPIS JOAN. JACOBI STAHEL. UNIVERS. BIBLIOP.

1 7 7 4.

91 H

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

BIBLIOTHECA
CAPITATIS
RATISBONENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

CAPUT I.

Primi calculi arithmeticæ vulgaris in numeris integris.

1. DEFINITIO. *Quantitas* eſt quævis magnitudo, quæ augeri & minui poteſt. *Numerus* eſt quantitas compoſita ex *unitatibus* ſeu *monadibus*. *Arithmetica* eſt ſcientia & ars tractandi numeros. Numeri autem varia eſt diviſio:

I. *Numerus integer* eſt, cujus unitates non intelliguntur diviſæ in partes: *fractus eſt*, cujus unitates intelliguntur diviſæ in partes æquales.

II. *Numerus par*, qui adcurate poteſt dividi in duas unitates, aut in duos æquales numeros integros, E. g. duo, quatuor, ſex, centum &c. *Impar* ita dividi nequit; E. g. unum, tria, quinque &c.

III. *Numeri homogenei* indicant res ejusdem ſpeciei E. g. octo floreni, & quinque floreni. *Heterogenei* indicant res diverſæ ſpeciei E. g. tres dies, ſeptem horæ, viginti minuta; quæ tamen omnia ad eandem ſpeciem reduci poſſunt.

2. HYPOTHESIS. Characteres, ſeu notæ, quibus omnis numerus exprimitur, ſunt decem vulgo cogni-

tæ: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Dextima eſt prima. o vocatur *zerus*, neque aliquid ſignificat: reliquæ ſunt notæ *ſignificantes*. Valor porro notarum, ex libera hominum inſtitutione, ſequens eſt: Quævis nota ſignificans ſeorſim collocata denotat *ſimplices unitates*. Quodſi notæ plures in una ſerie jungantur, valorem accipiunt ſingulæ a loco, ita, ut, incipiendo a dextra, prima ſignificet *ſimplices unitates*: ſecunda *unitatum decades*: tertia decadum decades, ſeu *centenarios unitatum*: quarta centenariorum decades, ſeu *millenarios ſimplices*: quinta *decades millenariorum*: ſexta *centenarios millenariorum*: ſeptima millenarios millenariorum, ſeu *milliones ſimplices*: octava *decades millionum*; & ſic deinceps. Porro milliones millionum vocant *bimilliones*: milliones bimillionum *trimilliones* &c. Demum ſiquo in loco nulla adſit nota ſignificans, in eo ponitur zerus.

3. COROLLARIUM. Igitur valor notarum, a dextra recedendo, continenter creſcit in decuplum. Unde ſi dato numero ad dextram adjiciantur unus, duo, tres &c. zeri, quævis nota jam valorem obtinebit decuplum, centuplum, millecuplum &c.

4. AXIOMATA generaliora ſunt ſequentia:

I. Totum eſt majus ſua parte: pars eſt minor toto: totum eſt idem, ac partes ſimul ſumptæ.

II. Si æqualibus æqualia addas, quæ proveniunt, ſunt æqualia.

III. Si ab æqualibus æqualia auferas, quæ remanent, ſunt æqualia.

IV. Aequalia uni tertio ſunt æqualia inter ſe.

V. Aequalia æqualibus ſunt æqualia inter ſe.

VI. Subductis ex toto partibus omnibus, remanet nihil.

VII. Si partes ex toto ſubductæ reſiduis adduntur, reſtitui tur totum &c.

ARTI-

ARTICULUS I.

Numeratio.

5. DEFINITIO. *Numeratio* eſt numeri dati legitima enunciatio: vel enunciati legitima per characteres expreſſio.

6. PROBLEMA. *Propoſitum numerum rite enunciare; aut enunciatum exprimere.*

RESOLUTIO I. Numerus datus E. g. 2.345.060.078 dividatur in claſſes; cuivis claſſi, incipiendo a dextra, tribuantur tres notæ; ultima ſola poterit eſſe etiam unius notæ. Poſt ſecundam claſſem notæ proximæ imponatur virgula; poſt quartam claſſem duæ virgulæ; poſt ſextam tres &c. Quævis claſſis trium notarum jam continebit centenarios, decades & unitates, vel ſimplices, vel decadum &c. prout locus fuerit a dextra remotior. Virgula deſignabit milliones; duæ virgulæ bimilliones &c. Leges ergo ſuperius exemplum: *bis mille, trecenti quadraginta quinque milliones; ſexaginta millia, ſeptuaginta octo.*

RESOLUTIO II. Eſt præcedenti affinis, & viva voce facillime exponitur.

DEMONSTRATIO patet ex hypotheſi (2).

ARTICULUS II.

Additio.

7. DEFINITIO. *Additio* eſt plurium datorum numerorum collectio in unam ſeriem, quæ *ſumma* adpellatur.

8. PROBLEMA. *Datos plures numeros addere.*

RESOLUTIO. Serventur ſequentes regulæ:

Regula I. Numeri dati infra ſe invicem ponantur ita, ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. in eadem deorſum columna reſpondeant. Ducta dein linea colligantur omnes unitates, ſumma infra lineam in S ponatur in columna unitatum.

Ex. I.	120304
	340263
S.	460567

tatum. Idem fiat in decadibus, centenariis &c. Vide exemplum I., in quo licet obſervare, zerum infra lineam in ea columna poni, cujus omnes notæ fuerint zeri.

Regula II. Dum ſumma columnæ cujuscunque excedit 9, numerus decadum, centenariorum &c. rejiciatur ad propriam columnam. In exemplo II. præterea adparet, infra lineam poni zerum, ſi ſumma aliqua habeat ad dextram zerum, & numerum rejectum poni etiam in illa columna, in qua alias zerus fuiſſet poſitus.

Ex. II.	83045
	97056
	75004
S.	255105

Regula III. In numeris heterogeneis fiat additio in quavis ſpecie ſeorſim. Dein reducantur, ſi fieri poteſt, ſpecies inferiores ad altiores, quæ reductio ſæpe ſatis patet, uti in exemplo III.; ubi 60. minuta conficiunt horam, uti 24. horæ unum diem; agetur tamen de hac reductione infra (67).

Ex. III.	*Dies.*	*horæ.*	*minuta.*
	235.	13.	37
	129.	10.	23
	364.	23.	60
S.	365.	0.	0

Demonstratio ſatis aperta eſt ex definitione (7) & axiomate I. (4).

9. PROBLEMA. *Examinare peractam additionem.*

Resolutio I. Examen certum fit ſubtractione, de qua mox (13).

Resolutio II. Commodius & ſatis ſecurum examen erit repetita additio, ita quidem, ut, ſi prior facta ſit ab imo ſurſum, jam inſtituatur a ſummo deoſum: ſi eadem ſumma prodierit, rite additum fuit.

Resolutio III. Alii inſtituunt examen per abjectionem novenarii, quoties fieri poteſt, primum ex ſumma, tum ex numeris additis: ſi utrinque nihil aut idem remanſerit, legitime fuit additum. In hac porro novenarii abjectione ſatis eſt, notas, non attendendo ad earum valorem localem, addere, & ex ſumma, quoties occurrit, abjicere 9. Ita in exemplo I. in S dic: 4 & 6 ſunt 10, id eſt 1 & 0 ſunt 1: 1 & 5 ſunt 6: 6 & 6 ſunt 12, ſeu 1 & 2 ſunt 3: 3 & 7 ſunt 10, ſeu 1 & 0 ſunt 1, ergo abjectis omnibus novena-

venariis remanet 1, ita abjectis novenariis ex numeris additis remanebit etiam 1. Ratio fundatur in eo, quod novenarius differat a decade sola unitate &c.

ARTICULUS III.

Subtractio.

10. DEFINITIO. *Subtractio* est inventio numeri, qui remanet, dum numerus alter ex altero tollitur. Numerus ita inventus vocatur *residuum* vel frequentius *differentia.*

11. PROBLEMA. *Numerum datum e dato subtrahere.*

RESOLUTIO I. *Regula I.* Posito subtrahendo infra minuendum, uti in additione (8), ductaque linea, unitates auferantur ex unitatibns, residuum ponatur infra lineam in columna unitatum in D: idem fiat in decadibus, centenariis &c.; eritque in D quæsita differentia. Vide exemplum I.; in quo adparet, relinqui zerum, si æqualis ab æquali, vel zerus a zero subtrahatur; notam vero esse integram residuam, ex qua zerus vel nihil subtrahitur.

Ex. I.	534068
	20066
D.	514002

Regula II. Quando nota inferior subtrahenda major est superiore; superiori intelligatur addita decas ex proxima nota significante desumpta; quæ proin proxima nota unitate imminuta erit; zeri vero ad sinistram inter notam illam unitate imminutam siqui occurrant, habeantur pro novenariis: demum si nota unitate multata fuerit unitas, ejus loco intelligatur positus esse zerus; quæ omnia videre est in exemplo II.

Ex. II.	2100432
	530627
D.	1569805

Regula III. Subtractio in heterogeneis inchoëtur a specie infima, in qua si totus numerus superior inferiore fuerit minor; addantur illi una, vel, si opus sit, plures unitates speciei majoris, mutatæ in speciem minorem. In exemplo III. una hora mutata est in 60 minuta, igitur minuta

Ex. III.	*dies*	*horæ.*	*minuta.*
	58.	21.	36
	23.	20.	57
D.	35.	0.	39

nuta 57 jam ſubtrahuntur ex 96. Ceterum reductio hæc ad minorem ſpeciem fit multiplicatione, de qua infra (20).

RESOLUTIO II. Manentibus reliquis, ut in reſolutione præcedente: ſi nota ſubtrahenda fuerit ſuperiore major, ſubtrahatur ſemper ex 10, reſiduo addatur ipſa nota ſuperior: tum ſequens nota inferior intelligatur aucta unitate; in ſuperioribus vero notis nihil immutetur.

DEMONSTRATIO. Clara eſt ex definitione (10) & hypotheſi (2).

12. PROBLEMA. *Examinare peractam ſubtractionem.*

RESOLUTIO I. Differentia inventa addita numero ſubtracto debet reſtituere priorem numerum, e quo facta erat ſubtractio, ſequitur ex axiomate VII. (4)

RESOLUTIO II. Etiam hic locum habet examen per abjectionem novenarii ex ſubtracto & reſiduo primum, dein ex numero minuendo (9).

13. PROBLEMA. *Examen additionis certum inſtituere.*

RESOLUTIO. Rite additum fuit, ſi, ſubtractis e ſumma ſingulis numeris addendis, nihil reſidui fuerit; ut patet ex axiomate V. (4). Vide dicta ſuperius (9).

ARTICULUS IV.

Multiplicatio.

14. DEFINITIO. *Multiplicatio* eſt inventio numeri, qui toties, vel ita contineat numerum *multiplicandum*, quoties, vel quomodo alter numerus datus, *multiplicator*, continet unitatem. Numerus ita inventus vocatur *factum* vel *productum*: multiplicandus & multiplicator communi vocabulo dicuntur *factores*. Demum *ducere* numeros in ſeſe, aut unum in alterum, idem eſt, ac eos inter ſe multiplicare.

15. COROLLARIUM. Multiplicatio igitur eſt repetita additio, multiplicandi nempe ad ſeſe toties facta, quoties unitas eſt in multiplicatore.

16. HY-

16. HYPOTHESIS. Pro multiplicatione numerorum ſimplicium ab 1 ad 9, vel memoria teneatur, vel parata habeatur ſequens tabula, quæ *abacus Pythagoricus* ſolet nominari. Uſus ejus hic eſt: factorum alter in ſuprema ſerie, alter in columna ultima ad ſiniſtram, ſumantur; tum a factore ſupremo deſcendo, & ſimul ab altero factore verſus dextram progrediendo pervenietur ad quadratulum commune; numerus ibi poſitus erit factum quæſitum.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

17. THEOREMA. *Cum duo numeri inter ſe multiplicantur, idem erit factum, ſive primus per ſecundum, ſive hic per illum multiplicetur.*

DEMONSTRATIO. In adjecto ſchemate conſideretur quævis punctorum ſeries *ab* ceu factor, continens tot unitates, quot in ea ſerie fuerint puncta: columna vero *ac* repræſentet factorem alterum: evidens eſt, ſemper totidem fore univerſim puncta, ſive ſeries *ab* ponatur toties, quoties unitas eſt in *ac*; ſive *ac* ponatur toties, quoties unitas eſt in *bc*: id eſt, idem fore factum, ſeu *ab* multiplicetur per *ac*, ſeu *ac* per *ab*.

18. COROLLARIUM. Igitur idem obtinebitur factum, uterlibet factor fuerit multiplicandus aut multiplicator. Porro plerumque commodius pro multiplicatore adhibetur numerus pauciorum notarum.

19. PROBLEMA. *Datos numeros inter ſe multiplicare.*

RESOLUTIO. Poſito multiplicatore infra multiplicandum ſuo rite loco (8) ductaque linea, obſerventur ſequentia:

Ex. I. 3024
2
6048

Regula I. Dum multiplicator eſt unius notæ: per eum multiplicentur primum unitates, dein decades

cades &c. multiplicandi: facta ſingula, niſi excedant 9. ponantur infra lineam debito cuivis loco. Zerus per quemcunque numerum multiplicatus dat ſemper in facto zerum. Exemplum I.

Regula II. Quando factum particulare excedit 9, decades, centenarii &c. rejiciantur ad proprium locum; ut in exemplo II; ubi & vides, rejectum talem numerum poni in loco, ubi alias zerus poneretur.

Ex. II.	40385
	4
	161540

Regula III. Quodſi uterque factor fuerit plurium notarum: totus multiplicandus primum multiplicetur per multiplicatoris unitates, tum per ejus decades &c. Porro factum per decades in unitates ponatur in loco decadum &c. Demum ſingula facta addantur, erit ſumma factum quæſitum; exemplum III.

Ex. III.	4078
	45
	20390
	16312
	183510

Regula IV. Quando ab initio ad dextram unius vel utriusque factoris occurrunt zeri, iis omiſſis multiplicatio peragatur per ſolas notas ſignificantes: facto autem toti omnes zeri utriusque factoris ad dextram adjiciantur. Exemplum IV.

Ex. IV.	34000
	3200
	68
	102
	108800000

Regula V. Si vero in loco intermedio multiplicatoris occurrunt zeri, iis plane omiſſis multiplicatio fiat per ſolas notas ſignificantes; ſed facta quævis ſuo rite loco ponantur. Exemplum V; ex quo adparet, ſemper primam facti notam poni infra notam multiplicatoris, per quam fit multiplicatio.

Ex. V.	30430
	3020
	6086
	9129
	91898600

Regula VI. Si demum multiplicator fuerit unitas cum zeris, adjiciantur duntaxat multiplicando omnes multiplicatoris zeri. E. g. ſit 3450 multiplicandus per 10, erit factum 34500; ſi idem numerus fuerit multiplicandus per 1000, erit factum 3450000. &c. Ratio patet ex dictis (3).

Regu-

Regula VII. In heterogeneis abſoluta in ſingulis ſpeciebus multiplicatione, reducantur, ubi fieri poteſt, inferiores ad altiores ſpecies, juxta dicta (Reg. III. 8.) & dicenda (67)

Ex. VI.	*dies.*	*horæ.*	*minuta.*
	36.	16.	12
	3	3	3
	108.	48	36
	110.	0.	36

DEMONSTRATIO. Conſideranti facile patet, toties poni omnes partes multiplicandi, ſcilicet unitates, decades &c., quoties unitas eſt in multiplicatore: ergo ita rite fit multiplicatio (14). * De examine multiplicationis per diviſionem agetur articulo ſequente (26)

20. PROBLEMA. *Reducere heterogeneorum altiorem ſpeciem ad inferiorem.*

RESOLUTIO. Numerus altioris ſpeciei multiplicetur per numerum indicantem, quot inferioris ſpeciei unitates contineantur in una unitate ſpeciei altioris. E. g. 3 dies multiplicati per 24 dant 72 horas. Ita 4 horæ ductæ in 60 dant 240 minuta &c.

ARTICULUS V.

Diviſio.

21. DEFINITIO. *Diviſio* eſt inventio numeri, qui toties vel ita contineat unitatem, quoties vel quomodo *diviſor* continetur in *dividendo*. Numerus ita inventus vocatur *quotus* vel *quotiens*.

22. COROLLARIUM 1. Cum per ſubtractionem repetitam diviſoris ex dividendo poſſit intelligi, quoties ille in hoc contineatur, diviſio erit repetita ſubtractio.

23. COROLLARIUM 2. Igitur facto diviſo per alterum factorem, factor alter erit quotus, quod planum eſt ex definitionibus (14 & 21). Cum vero dividendus quilibet ſpectari poſſit ceu factum, ejus factores erunt diviſor & quotus. Unde ſi numerus per alium tertium multiplicetur, & hoc factum per eundem tertium dividatur, quotus erit prior numerus. E. g. 4 ductus in 3 dat factum 12, quod diviſum per 3 dat quotum 4. &c.

24. PROBLEMA. *Numerum datum per alium datum dividere.*

RESOLUTIO. Exemplum I. Exhibet ſchema cujusvis diviſionis: in D eſt dividendus: in d diviſor, in q quotus, pro quo inveniendo obſerventur ſequentes regulæ:

Regula I. Diſpiciatur, quoties diviſor contineatur in ultima ad ſiniſtram nota, vel, ſi hæc diviſore minor fuerit, in ultimis notis: quotus ponatur in q: per inventum quotum multiplicetur diviſor. factum ſubtrahatur a nota vel notis diviſis. Si nihil reſiduum fuerit, eodem modo dividantur ſingulæ notæ ſequentes ad dextram.

Ex. I.	D. 2469	d. 3.
	2469	q. 823
	000	

Regula II. Quando, peracta notæ alicujus diviſione, adeſt reſiduum, huic adjiciatur ſequens nota dividendi, & repetatur diviſio. Quodſi abſolutæ omnium notarum diviſione fuerit reſiduum, ponatur id poſt quotum ad dextram, eique ſubducta lineola ſubjiciatur diviſor; eritque hæc fractio pars quoti. Videatur exemplum II.

Ex. II.	3757	24
	24	$156\frac{13}{24}$
	135	
	120	
	157	
	144	
	13	

Regula III. Si diviſoris notæ dextimæ fuerint zeri: tot notæ dextimæ dividendi puncto reſecentur, quot fuerint ii diviſoris zeri: in reliquis fiat diviſio per diviſorem ſuis zeris multatum; notæ vero dividendi reciſſæ, cum reſiduo, ſiquod fuerit, erunt ponendæ poſt quotum, iisque ducta linea ſubſcribendus totus diviſor; ut docet exemplum III.

Ex. III.	375.67	3.00
	36	$125\frac{67}{300}$
	015	
	15	
	0	

Regu-

Regula IV. Quodſi & dividendi & diviſoris notæ dextimæ ſint zeri, tot in utroque plane omittantur, quot ſunt in diviſore. In exemplo IV. erit revera dividendus 360, diviſor 3. &c.

Ex. IV.	360.00	3.00
	36	120.
	00	

Regula V. Quando diviſor fuerit unitas cum zeris; in dividendo tot notæ dextimæ reſcindantur; quot fuerint zeri diviſoris: reliquæ dividendi notæ erunt quotus, cui ceu pars & fractio adduntur notæ dividendi reſciſſæ ſubſcripto toto diviſore. E. g. ſit dividendus 34567: diviſor 100, erit quotus $345\frac{67}{100}$. ſi fuerit idem dividendus, diviſor vero 1000, erit quotus $34\frac{567}{1000}$ &c.

Regula VI. Quando diviſor eſt major integro dividendo, quotus erit fractio, ſeu dividendus ſubſcripto diviſore. E. g. ſit dividendus 3, diviſor 4; erit quotus $\frac{3}{4}$. Denique per ſe patet, dum diviſor eſt æqualis dividendo, quotum ſemper fore unitatem, quia numerus in ſeipſe non niſi ſemel continetur E. g. 3 diviſus per 3 dat quotum 1 &c.

Regula VII. In heterogeneis ſi diviſa altiore ſpecie fuerit reſiduum, id mutatum in ſpeciem inferiorem (20) huic addatur. In exemplo V. reſidui ſunt dies 5, qui dant 120 horas: unde jam habentur 128 horæ divendæ per 8. &c.

Ex. V.	*dies.*		*horæ.*	
	37	$\frac{8}{4}$	8	
	32		128	$\frac{8}{16}$
	5		8	
			48	
			48	
			0	

Demonstratio. Inventus eſt quotus indicans, quoties diviſor contineatur in ſingulis dividendi partibus, ſcilicet in ejus millenariis, centenariis &c. ergo rite diviſum eſt. (21).

25. PROBLEMA. *Examinare abſolutam diviſionem.*

Resolutio. Quotus ductus in diviſorem, cum reſiduo, ſiquod fuerit, ſi reſtituerit dividendum, rite diviſum fuit; patet ex corollario 2 (23).

26. PRO-

26. PROBLEMA. *Examinare peractam multiplicationem.*

RESOLUTIO. Factum diviſum per alterutrum factorem ſi dederit quotum, qui ſit alter factor, legitima fuit multiplicatio, ut conſtat ex eodem Corollario 2 (23). * Conſtructionem, & inſignem in multiplicatione & diviſione uſum *tabellarum Neperianarum* viva vox facillime commonſtrabit.

CAPUT II.

Primi calculi Algebræ.

27. DEFINITIO 1. *Algebra* eſt ſcientia, quæ de quantitatibus generatim agit. Quantitates porro deſignantur literis alphabeti minoribus, & quidem *quantitates cognitæ* literis primis a, b, c &c.; *incognitæ* ultimis x, y, z &c.; percommode etiam quævis quantitas exprimitur prima vocis litera; ita t exprimit tempus, c celeritatem, s ſummam &c.

28. HYPOTHESIS 1. Signa algebraica ſunt ſequentia:

$+$ *plus*, ſignum additionis.	$=$ *æquale*, ſignum æqualitatis.
$-$ *minus*, ſignum ſubtractionis.	$a > b$, indicat a eſſe majus, quam b.
$\times$ vel. ſignum multiplicationis.	$a < b$, indicat a eſſe minorem quantitatem.
$:$ vel $\frac{a}{b}$, ſignum diviſionis.	∞, ſignum quantitatis infinitæ.

29. DEFINITIO 2. Quantitas varia eſt:

I. Quantitas *poſitiva* eſt, cui præfigitur *ſignum poſitivum* $+$. E. g. $a+b$. Quævis autem quantitas ab initio ſine ſigno poſita intelligitur habere præfixum $+$; ita $a+b = +a+b$. Quantitas *negativa* ſemper habet præfixum *negativum* $-$; E. g. $-a-b$. Porro ſigna $+$ & $-$ ſemper con-

contrario ſenſu accipiuntur, ita, ut, ſi + ſignificet lucrum, incrementum, acceſſum, ſurſum &c. jam ſignum − deſignet damnum, decrementum, receſſum, deorſum &c. vel viciſſim. Eſt igitur $a-a=0$; & $a+a-a=a$ &c.

II. Quantitas *monomia* ſeu *incomplexa* eſt, quæ conſtat una vel pluribus literis per ſigna + & − non connexis; E. g. a vel ab. vel abc. *Polynomia* ſeu *complexa* conſurgit ex literis ſigno + vel − conjunctis E. g. $a+b$. Item $a+b-c$. Quantitatis ita conjunctæ literæ vocantur *termini:* & quidem quantitas duorum terminorum vocatur *binomia;* trium terminorum *trinomia* &c. Cumque valor terminorum hic non pendeat a loco; idem erit, quocunque ponantur ordine E. g. $b+a=a+b$; licet rectius ponantur juxta ordinem alphabeti.

30. HYPOTHESIS 2. Cum plures literæ junguntur absque ſigno, intelliguntur inter ſeſe eſſe multiplicatæ. E. g. $ab=a\times b$. Literæ igitur ſic junctæ ſunt factum, literæ ſingulæ ſunt factores; quare manebit valor facti, quocunque ordine jungantur; eritque $ab=ba$, cum ſit $a\times b=b\times a$ (17). Ita $abc=acb=bac=bca=cab=cba$ &c. Quando multiplicandæ ſunt quantitates polynomiæ, ita ſolet indicari: $\overline{(a+b-c)}\times d$ vel $\overline{(a+b-c)}\,d$. Ita $\overline{(a+b-c)}:\overline{(a-b)}$ vel $a+b-c:a-b$. Eodem modo indicatur diviſio polynomiarum $\overline{(a+b-c)}:\overline{(2ab-3d)}$ vel $a+b-c:2ab-3d$; vel frequentius $\frac{a+b-c}{2ab-3d}$ &c.

31. HYPOTHESIS 3. Notæ numericæ in algebra triplici ſignificatione abhibentur:

I. Notæ numericæ ſeorſim, ſeu ſolæ poſitæ ſignificant ſeipſas tantum. E. g. $a+5$ &c.

II. Nota numerica præfixa literis vocatur harum literarum *coëfficiens*, & indicat, literas illas hac nota eſſe multiplicatas; E. g. $3a=a\times 3$. Litera quævis ſine præfixa nota numerica intelligitur habere coëfficientem 1, e. g. $a+bc=1a+1bc$. Demum quandoque litera etiam alteri juncta vocatur ejus coëfficiens.

II. Numerus minusculus poſitus ad dextram ſupra literam, eſt ejus *exponens*, & indicat, literam illam eſſe toties

ties multiplicatione positam. E. g. $a^2 = aa$; ita $a^3\ b^2 = aaabb$. Quodsi nullus adscriptus sit exponens, intelligitur 1; E. g. $ab = a^1\ b^1$. Sæpe etiam literæ minusculæ sunt exponentes. E. g. a^m vel a^{m+r} vel a^{2n-s} &c.; ubi litera intelligitur toties multiplicatione posita, quoties unitas est in exponente.

32. DEFINITIO 3. Quantitates *homogeneæ* vel *similes* constant iisdem literis, tametsi coëfficientes numerici sint diversi. E. g. $5ab$ & $-3ab$. *Heterogeneæ* constant vel diversis literis, vel iisdem literis cum diversis exponentibus. E. g. ab & $-2ac$. Item $a^2 - 4a$ &c.

ARTICULUS I.

Reductio & Additio.

33. PROBLEMA. *Quantitates reducere ad simpliciorem expressionem.*

Resolutio. *Regula I.* Si adsint termini homogenei ejusdem signi, terminus semel ponatur cum coëfficiente, qui sit summa omnium coëfficientium; erit E. g.: $3a + b + 2a = 5a + b$. Item $3a - 2b + 4a - b = 7a - 3b$. Item $3a + 10 - 2b + 5 + a - b = 4a - 3b + 15$. Nam numeri seorsim positi sub eodem signo colliguntur in summam.

Regula II. Quodsi termini homogenei, vel numeri seorsim positi, habuerint contraria signa, solus excessus majoris supra minorem ponatur cum suo signo. E. g. erit $3a - 2a = a$. & $3a - 5a = -2a$. & $3a + 15 - 3a - 12 = 3$. Patet ex dictis (29).

Regula III. Quando vero omnes termini fuerint heterogenei, reductioni non erit locus. E. g. $3a - a^2 + 5 - ab$. &c.

34. PROBLEMA. *Quantitates algebraicas addere.*

Resolutio. Series datæ addendæ conjungantur in unam, servatis regulis reductionis (33). E. g.

$$\left.\begin{array}{l} 2a + 3b - 15 + bc + abc \\ 3a - b - 8 - bc - bcd \end{array}\right\} \text{Series addendæ}$$

$$5a + 2b - 23 + abc - bcd. \text{ Summa.}$$

ARTI-

ARTICULUS II.

Subtractio.

35. PROBLEMA. *Quantitatem datam e data ſubtrahere.*

RESOLUTIO. Quantitatis ſubtrahendæ ſigna mutentur in contraria; & ita quantitati minuendæ addatur, adhibita ſemper reductione.

E. g. ſit quantitas minuenda $= 3a + 2b - 3c + 5d + mx$
Subtrahenda $= 2a - 2b - 6c + 7d + mx$
Mutentur ſigna $= - + + - -$
Reſiduum, facta additione, erit $= a + 4b + 3c - 2d$.

DEMONSTRATIO. Subtrahere poſitivum eſt addere idem negativum; viciſſim ſubtrahere negativum idem eſt addere poſitivum.

36. COROLLARIUM. Quando igitur major quantitas E. g. $7a$ ſubtrahitur e minore E. g. $3a$; revera minor ſubtrahitur e majore, ſed reſiduum habebit ſignum majoris, mutatum in contrarium E. g. $-4a$. Ita ſit $-6b$ ſubtrahenda ex $-2b$, reſiduum erit $+4b$. Vide ſuperius dicta (29).

ARTICULUS III.

Multiplicatio.

37. PROBLEMA. *Quantitates algebraicas multiplicare.*

RESOLUTIO. *Regula I.* Literæ multiplicandæ junguntur absque ſigno (30). E. g. $a \times b = ab$.

Regula II. Diverſa factorum ſigna in facto dant $-$, eadem ſigna dant $+$. E. g. $a \times -b = -ab$. Ita $-a \times b = -ab$. Sed $a \times b = ab$. Et $-a \times -b = ab$.

Regula III. Etiam coëfficientes multiplicentur; E. g. $8a \times -2b = -16ab$.

Regula IV. Si in utroque factore occurrat eadem litera cum eodem vel diverſo exponente, in facto ponatur ea-

dem litera cum exponente, qui ſit ſumma exponentium, quos habent factores: E. g. $a \times a = a^1 \times a^1$ (31) $= aa = a^{1+1}$. Ita $a^2 \times a = aaa = a^3 = a^{2+1}$. Ita $a^3 \times a^4 = a^{3+4} = a^7$. Generaliter $a^m \times a^n = a^{m+n}$ & $a^m \times a^m = a^{2m}$.

Regula V. Quodſi factores fuerint polynomii; ſinguli termini unius ducantur in ſingulos alterius; facta colligantur in ſummam. E. g. ſint factores $\left\{\begin{array}{l} 3a^2 - 2ab^3 \\ 2a^3 - 3a^2b^3 \end{array}\right.$

Fiat $\begin{array}{l} 6a^5 - 4a^4b^3 \\ \quad -9a^4b^3 + 6a^3b^6 \end{array}$

Factum $= 6a^5 - 13a^4b^3 + 6a^3b^6$

DEMONSTRATIO. *Regula II.* Eſſe $a \times b = ab$, evidens eſt. Eſſe vero $-a \times b = -ab$; ita oſtenditur: ſit $(a-a) \times b$, erit factum $= 0$; ſed $a \times b = ab$: ergo $-a \times b = -ab$, ut nempe factum ſiat $ab - ab = 0$. Ita $a \times -b = -ab$; nam $a \times -b = -b \times a$ (17) $= -ab$. Demum eſſe $-a \times -b = ab$ iterum patet ex $(a-a) \times -b$; erit enim factum $= 0$; ſed $a \times -b = -ab$: ergo $-a \times -b = ab$, ut factum ſit $= -ab + ab = 0$. Cetera per ſe patent.

ARTICULUS IV.

Diviſio.

38. PROBLEMA. *Quantitates algebraicas dividere.*

RESOLUTIO. *Regula I.* Si dividendus & diviſor fuerint incomplexi, & utriusque literæ omnes diverſæ, diviſio tantum indicatur per ſignum. E. g. $a : b$ vel $\frac{a}{b}$. Ita $\frac{ab}{-cd}$ &c. Et hæc expreſſio haberi poteſt pro quoto.

Regula II. Si dividendus & diviſor incomplexi habuerint unam vel plures literas aut notas communes, habebitur quotus, ſi communes eæ literæ & notæ omittantur. E. g. $\frac{ab}{b} = a$; & $\frac{abc}{ac} = b$; & $\frac{abc}{ad} = \frac{bc}{d}$ & $\frac{3ab}{3a} = b$; & $\frac{ab}{abc} = \frac{1ab}{abc} = \frac{1}{c}$ &c.

Regula III. Etiam coëfficientium fit diviſio. E. g. $\frac{6ab}{2a} = 3b$; & $\frac{15ab}{3c} = \frac{5ab}{c}$.

Regu-

Regula IV. Eadem dividendi & diviſoris ſigna in quoto dant +; diverſa dant −; E. g. $\frac{ab}{a} = b$; & $\frac{-ab}{-b} = a$; & $\frac{ab}{-a} = -b$; & $\frac{-ab}{a} = -b$.

Regula V. Quando in dividendo & diviſore eſt communis litera cum diverſis exponentibus; ſubtrahatur exponens diviſoris ab illo dividendi, & litera illa diviſoris omittatur. E. g. $\frac{a^2 b}{a} = a^{2-1} b = ab$; & $\frac{a^5 b^4}{a^2 b} = a^{5-2} b^{4-1} = a^3 b^3$; & $\frac{a^{2m} b^{n+1}}{a^m b} = a^{2m-m} b^{n+1-1} = a^m b^n$.

Regula VI. Si dividendus fuerit complexus, diviſor incomplexus; ſinguli termini dividendi per diviſorem dividuntur. E. g. $\frac{ax-bx}{x} = \frac{ax}{x} - \frac{bx}{x} = a-b$. Unde etiam $\frac{ax-bx}{cx} = \frac{a-b}{c}$; Imo etiam ſi dividendus fuerit incomplexus, diviſor complexus, & ſinguli utriusque termini habuerint literam communem, habebitur quotus, ſi litera communis omittatur: E. g. $\frac{ax}{bx-cx} = \frac{a}{b-c}$. Et generaliter ſi quicunque diviſor & dividendus in ſingulis terminis habuerint literam communem, ea ubique deleta habetur quotus E. g. $\frac{ax+bcx-dx}{mx-nx} = \frac{a+bc-d}{m-n}$;

Regula VII. Quodſi & dividendus & diviſor fuerint complexi; aſſumatur diviſoris terminus quicunque, & per eum dividatur terminus dividendi, in quo prior continetur: per quotum inventum multiplicetur totus diviſor, factum ſubtrahatur e dividendo; eodem dein diviſoris termino primum aſſumpto repetatur in reliquis terminis dividendi diviſio; ſi omnibus abſolutis nihil remanſerit, quotus eſt legitimus. In exemplo hic poſito terminus primus 3a aſſumitur in diviſione:

$$\begin{array}{l|l} 6a^2 + 9ab - 3ac^2 - 2ad - 3bd + c^2 d & 3a - d \\ \hline 6a^2 + 9ab - 3ac^2 - 2ad - 3bd + c^2 d & 2a + 3b - c^2 \\ \hline \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ & \end{array}$$

Si vero plures termini fuerint reſidui, diviſio tantum ſolet indicari; E. g. $\frac{6a^2-3ac-2bd}{3a-d}$. In hoc exemplo $\frac{a^2-x^2}{a+x}$, quotus erit $a-x$;

DEMONSTRATIO. Diviſor ductus in quotum ita inventum reſtituit quantitatem dividendam: ergo quotus eſt legitimus (23).

39. COROLLARIUM 1. Igitur generaliter eſt $a^0=1$. Nam $\frac{a^m}{a^m}=1=a^{m-m}=a^0$.

40. COROLLARIUM 2. Quantitas exponentis negativi eſt æqualis ſuo coëfficienti diviſo per illam quantitatem cum eodem exponente poſitivo; ſive $ab^{-m}=\frac{a}{b^m}$, ubi eſt a coëfficiens quantitatis b^{-m}. Nam $\frac{ab^m}{b^{2m}}=\frac{a}{b^m}$ (regula V. diviſionis 38) $=ab^{m-2m}=ab^{-m}$. Undé $b^{-m}=1b^{-m}=\frac{1}{b^m}$.

CAPUT III.

Fractiones.

ARTICULUS I.

Præviæ proprietates numerorum integrorum.

41. DEFINITIO 1. *Numerus primus* eſt, qui non oritur ex multiplicatione alterius, præter unitatem; E. g. 1. 3. 5. 7. 11. &c. *Compoſitus* oritur ex alterius multiplicatione; E. g. $4=2\times2$ &c. *Numeri inter ſe primi* vocantur, qui nullum habent factorem communem, præter unitatem; E. g. 3. & 5; item 6. & 13. &c. *Numeri non primi* habent factorem communem E. g. 6 & 9 $=3\times2$ & 3×3. Porro quivis numeri, dum non ſpectantur

ceu

ceu orti ex multiplicatione per eundem tertium numerum, vocantur *ſimpli*: dum conſiderantur ceu orti ex tali multiplicatione, dicuntur *æque multipli*. E. g. 12 & 21=4×3 & 7×3; ubi 4 & 7 ſunt ſimpli, 12 & 21 eorum æque multipli. Ita *a* & *b* ſunt ſimpla, *am* & *bm* eorum æque multipla.

42. DEFINITIO 2. *Menſura communis* duorum vel plurium numerorum dicitur numerus, qui omnes illos adcurate, id eſt ſine reſiduo, dividit. Sermo autem in toto hoc articulo eſt de numeris integris. Ita 3 eſt menſura communis numerorum 9. 18. 21. Ita *a* eſt communis menſura quantitatum *ab*, *abc*, *ad* &c. Numerus porro alium adcurate dividens dicitur illum *metiri*. *Menſura communis maxima* eſt numerorum diviſor adcuratus maximus E. g. 3 numenorum 9 & 21. Non item 3 numerorum 12 & 18, quia major eſt 6.

43. THEOREMA. *Dividendus & diviſor ſimpli eundem quotum præbent, quem eorum æque multipli: & viciſſim.*

DEMONSTRATIO. Quilibet dividendus ſimplus poteſt vocari *a*, quivis diviſor *b*, & quotus inde ortus *q*: priorum vero æque multipli *am* & *bm*: erit ergo $\frac{a}{b}=q$, ex hypotheſi; cumque ſit $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$ (38) erit pariter $\frac{am}{bm}=q$.

44. THEOREMA. *Factores cujusvis numeri poſſunt reduci ad duos.*

DEMONSTRATIO patet in exemplo: eſt 24=4×3×2×1; cum vero ſit 3×2×1=6; erit 24=4×6=4×3×2×1. &c.

45. THEOREMA. *Numerus conſtans pluribus factoribus poteſt adcurate dividi per ſingulos tam ſimplices, quam compoſitos e binis, ternis &c.*

DEMONSTRATIO. Sit quivis numerus *n*, cujus factores ſint *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: erit *n*=*abcde*, quod factum poteſt dividi per ſingulos ſimplices factores, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: uti & per compoſitos e binis, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *bc*, *bd*, *be*, *cd*,

cd, *ce*, *de*; item per compoſitos e ternis, *abc*, *abd*, *abe*, *bcd*, *bce* &c., uti patet: ergo & $n = abcde$ ita poteſt dividi.

46. THEOREMA. *Ut diviſor metiatur dividendum, in hoc debent contineri omnes illius factores.*

DEMONSTRATIO. Diviſor ductus in quotum eſt ipſe dividendus: ergo & factores diviſoris & quoti ſunt iidem, qui ſunt dividendi: ergo ſi diviſoris factores non fuerint in dividendo, adcurata diviſio haberi nequit.

47. COROLLARIUM. Igitur numerorum primorum inter ſe neuter alterum metitur; cum nullus diviſoris factor, præter unitatem ſit dividendo communis (41).

48. THEOREMA. *Si numerus* c *metitur numeros* a & b, *metitur etiam I ſummam* a+b: *II differentiam* a−b.

DEMONSTRATIO I. Metiatur *c* numerum *a* per *m*, *b* per *n*, ſive ſit $\frac{a}{c} = m$, $\frac{b}{c} = n$: erit $a = cm$, $b = cn$: ergo $a+b = cm+cn = (m+n)c$; ſed *c*, utpote factor, metitur $(m+n)c$: ergo & æqualem $a+b$.

II. Sit ut prius: $a-b = cm-cn = (m-n)c$; metitur autem factor *c* numerum $(m-n)c$: ergo & ei æqualem $a-b$.

49. THEOREMA. *Si* c *metitur* a & a+b, *metietur* & b.

DEMONSTRATIO. Metiatur *c* numerum *a* per *m*, numerum $a+b$ per *u*; erit $a = cm$, $a+b = cn$: ergo $cn-cm = a+b-a = b$; cum ergo *c* metiatur $cu-cm = (u-m)c$, metietur & æqualem *b*.

50. THEOREMA. *Si* c *metitur* a, *metietur & quemvis ejus multiplum* ab.

DEMONSTRATIO. *c* metiatur numerum *a* per *m*, erit $a = cm$, & $ab = bcm$; *c* vero factor metitur *bcm*: ergo & æqualem *ab*.

51. THEOREMA. *Si* bc *metitur* a; & b & c *metientur eundem numerum* a.

DEMON-

DEMONSTRATIO. Metiatur *bc* numerum *a* per *m*; erit $a=bcm$: ſed *b* & *c* factores metiuntur *b c m*; ergo & æqualem *a*.

52. THEOREMA. *Numerus ad dextram habens* 0 *vel* 5 *poteſt adcurate dividi per* 5.

DEMONSTRATIO. Talis numerus vel ſolis decadibus, vel decadibus & numero 5 conſtat: cum ergo & decades & 5 adcurate dividatur per 5, patet theorematis veritas.

53. COROLLARIUM. Numerus habens ad dextram unum vel plures zeros, adcurate dividitur per 10. 100. 1000. &c. Patet ex regula V. diviſionis (24).

54. THEOREMA. *Numerus, cujus notæ ceu ſimplices unitates additæ in unam ſummam faciunt numerum, qui per* 3 *adcurate dividi queat; ſemper, etiam ſpectato vero notarum valore, poterit dividi per* 3.

DEMONSTRATIO in exemplo patebit. Sit numerus 417; cum ſit $4+1+7=12$, qui per 3 adcurate dividitur, oſtendendum eſt, etiam 417 per 3 adcurate dividi. Nota ultima eſt $4=400=40$ decadibus: ex his ſi tollantur 40 novenarii, remanent unitates $40=4$ decadibus: ſubtractis iterum 4 novenariis, remanent unitates 4. Altera nota eſt $1=10$: ſubtracto novenario remanet unitas $=1$. Prima nota eſt $=7$ unitatibus. Igitur ſubtractis e numero 417 omnibus novenariis, id eſt (22) diviſo numero per 9, remanent unitates $4+1+7=12$: Cum ergo numerus, demptis his 12, poſſit dividi per $9=3\times3$, etiam poterit dividi adcurate per 3: ſed & $12=4\times3$ poteſt dividi per 3: ergo totus etiam numerus.

55. PROBLEMA. *Invenire numeri dati omnes diviſores adcuratos.*

RESOLUTIO. Omnis numerus par adcurate dividitur per 2, ex definitione (1). Ex hac ergo definitione & præcedentibus theorematis (52 & 54) tentetur dati numeri diviſio per primos numeros 2. 3. 5. 7. &c., dum inveniatur diviſor adcuratus: quotus eodem modo dividatur: & ſic porro, donec quotus ſit unitas. Ex inventis his diviſoribus primis componantur omnes binarii, ternarii &c., & habebuntur omnes numeri dati diviſores. Si nullus adcu-

curatus divisor haberi queat, numerus erit primus. Sit E. g. numerus datus 210; quid agendum sit, exhibet sequens schema:

210	2	5	3	7
	105	21	7	1

Igitur divisores simplices erunt: 2. 3. 5. 7. Ex his habebuntur omnes compositi, ut vides: universim 15 divisores: 2. 3. 5. 6. 7. 10. 14. 15. 21. 30. 35. 42. 70. 105. 210.

Compositi binarii | Compositi ternarii

$2.3=6$ | $3.5=15$ | $2.3.5=30$ | $2.5.7=70$
$2.5=10$ | $3.7=21$ | $2.3.7=42$ | $3.5.7=105$
$2.7=14$ | $5.7=35$

Demum unus compositus quaternarius: $2.3.5.7=210$.

Demonstratio patet ex natura divisionis, & ex superiore Theoremate (45).

56. PROBLEMA. *Invenire duorum numerorum inter se non primorum mensuram communem maximam.*

Resolutio. In schemate adjecto E. g. duo numeri sunt $a=207$ & $b=161$. Dividatur major a per minorem b: tum dividatur b per residuum d: tum dividatur d per residuum f; & sic porro: quodsi perveniatur ad residuum $=1$, ii numeri erunt primi inter se; igitur nulla erit eorum communis mensura, præter unitatem, quæ metitur omnem numerum. Si vero perventum fuerit ad divisorem adcuratum, qui nullum relinquat residuum: is divisor erit datorum numerorum mensura communis maxima quæsita. In nostro exemplo hæc mensura est $f=23$.

a. 207	b. 161
161	c. 1
d. 46	
b. 161	d. 46
138	e. 3
f. 23	
d. 46	f. 23
46	g. 2
0	

Demonstratio I. *f esse mensuram communem numerorum a & b.* f metitur d, ex hypothesi: ergo & ejus multiplum de (50). Cumque quivis numerus metiatur seipsum, f metitur f: ergo f metitur etiam summam $de+f$

(43)

(48)=b(25). Ergo & multiplum bc (50): ergo & ſummam $bc+d$(48)=a: ergo f jam metitur a & b; ergo eſt eorum menſura communis.

II. *f. eſſe menſuram maximam.* Sit, ſi fieri poteſt, menſura communis numerorum a & b, major m, quam f. Metietur m numeros a & b: ergo & bc(50) & differentiam $a-bc$(48): Cum vero ſit $a=bc+d$ (25) ſi ab æqualibus æquale bc aufferas, erit $a-bc=d$: ergo m metietur d: ergo & multiplum de(50): ergo & differentiam $b-de$(48). Cumque iterum ſit $b=de+f$, erit, ut prius, ablato utrinque de, erit, inquam $b-de=f$: ergo m metitur f, numerus ex hypotheſi major minorem, quod eſt abſurdum: igitur f eſt menſura maxima numerorum a & b.

ARTICULUS II.

Fractiones vulgares.

57. DEFINITIO. *Fractio propria vulgaris* eſt, quando unitas diviſa intelligitur in plures partes æquales, quarum aliquæ duntaxat accipiuntur. E. g. Si florenus diviſus cogitetur in decem, vel viginti &c. partes æquales, & ex his accipiantur una, duæ, tres &c. partes. Unde fractio ita exprimitur $\frac{1}{20}$: inferior numerus vocatur *denominator* indicatque, in quot partes æquales unitas ſit diviſa E. g. 20: ſuperior dicitur *numerator* oſtendens, quot earum partium accipiantur E. g. 3. Unde etiam ſequitur, fractionem propriam ſemper eſſe minorem unitate integra; & numeratorem in ea ſemper eſſe denominatore minorem. Quodſi ergo numerator aut æqualis aut major fuerit denominatore, fractio erit & dicetur *impropria* vél *ſpuria*.

58. COROLLARIUM 1. Si fractionis ſpuriæ numerator denominatori fuerit æqualis, fractio ipſa erit æqualis unitati; accipiuntur enim omnes partes, in quas unitas diviſa eſt. E. g. $\frac{3}{3}=1$. $\frac{20}{20}=1$: generaliter $\frac{a}{a}=1$. Unde & fractiones hæ omnes inter ſe æquales ſunt: $\frac{1}{3}=\frac{20}{60}=\frac{1000}{3000}=1$. Quodſi in tali factione numerator denominatore major fuerit, fractio ipſa eſt major unitate. E. g. $\frac{4}{3}$; cum $\frac{3}{3}$ ſit æqualis unitati.

59. COROLLARIUM 2. Fractionum *cognominum* (ſeu quarum idem eſt denominator, qui & *nomen* fractionis dicitur) ea erit major, cujus numerator altero major fuerit, quia in ea plures partes accipiuntur. Viciſſim, ſi numeratores ſint æquales, ea erit major, cujus denominator minor fuerit; in illa enim unitas diviſa eſt in pauciores, ideoque majores partes: ergo totidem quidem, ſed majores partes accipiuntur.

60. COROLLARIUM 3. Reſiduum in diviſione integrorum ſubſcripto diviſore ſemper eſt fractio propria: E. g. 8 diviſis per 3, quotus eſt $2+\frac{2}{3}$: porro $\frac{2}{3}$ indicat duas integras unitates inter tres eſſe dividendas: quod fit, ſi quævis unitas in tres partes æquales dividatur, & ſumantur duæ ejusmodi partes unitatis, id quod cum definitione fractionis (57) prorſus conſentit.

61. COROLLARIUM 4. Fractio quævis haberi poteſt pro quoto, qui oritur ex diviſione numeratoris per denominatorem.

62. PROBLEMA. *Fractiones reducere ad idem nomen.*

Reſolutio. Cujusvis fractionis numerator ducatur in omnes reliquarum denominatores; hæc facta erunt novi numeratores: communis denominator erit factum ex omnibus denominatoribus. E. g. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4} = \frac{8}{12}, \frac{9}{12}$. Ita $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7} = \frac{56}{84}, \frac{63}{84}, \frac{60}{84}$. Generaliter $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}, \frac{d}{q} = \frac{anpq}{mnpq}, \frac{emnq}{mnpq}, \frac{dmnp}{mnpq}$.

DEMONSTRATIO. Manet idem quotus, ſi dividendus & diviſor ducuntur in eundem numerum (43): ergo & eadem fractio, ſi, quod hic fit, numerator & denominator ducantur in eundem numerum, ſcilicet factum ex denominatoribus ceterarum (61).

63. COROLLARIUM. Reductio hæc brevior erit, dum denominator maximus ejusmodi eſt, ut reliqui per numerum aliquem multiplicati fiant æquales; tum enim & numerator & denominator per hunc numerum multiplicantur E. g. $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12} = \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{7}{12}$.

64. PRO-

64. PROBLEMA. *Fractionem, cujus termini non ſint inter ſe primi, reducere ad minores terminos.*

RESOLUTIO. Dividatur & numerator & denominator per communnem aliquam menſuram (1. 52. 54) nova fractio erit priori æqualis E. g. $\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$. Item $\frac{300}{400} = \frac{3}{4}$ &c.

DEMONSTRATIO continetur in theoremate (61).

65. COROLLARIUM 1. Redigetur igitur fractio ad terminos minimos, ſi ejus termini dividantur per menſuram communem maximam (56). E. g. $\frac{16}{20}\frac{1}{7} = \frac{7}{9}$.

66. COROLLARIUM 2. Fractio impropria reducitur ad minimos terminos, ſi numerator dividatur per denominatorem, & adhærens quoto integro fractio per præcedens Corollarium (65) ad minimos terminos reducatur E. g. $\frac{20}{6} = 3\frac{2}{6} = 3\frac{1}{3}$.

67. COROLLARIUM 3. Cum ſpecies inferior numerorum heterogeneorum contineat ſuperiorem, E. g. 24 horæ diem; facile patet, poſſe eum conſiderari ceu fractionem ſpuriam, cujus denominator ſit ſpecies ſuperior; ita 60 minuta $= \frac{60}{60}$ unius horæ; ita 48 horæ $= \frac{48}{24}$ unius diei $= 2$ diebus. Unde ſpecies inferior reducetur ad ſuperiorem, ſi dividatur per numerum indicantem, quoties unitas ſit in majori ſpecie.

68. PROBLEMA. *Mutare numerum integrum in fractionem dati nominis.*

RESOLUTIO. Integer multiplicetur per datum nomen, factum erit numerator fractionis ſpuriæ. E. g. $7 = \frac{28}{4}$. Ceterum generaliter integer erit fractio ſpuria, ſi ei ſubſcribatur unitas. E. g. $a = \frac{a}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$.

DEMONSTRATIO. Quævis integri unitas ita intelligitur diviſa in tot partes, quot exigit datus denominatur.

69. PROBLEMA. *Fractiones datas addere in unam omnibus æqualem.*

RESO-

Resolutio. Fractiones diversi nominis reducantur ad idem nomen (62): tum soli numeratores addantur, retento communi denominatore, E. g. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{7}{12}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{7}{12}$ (63) $=\frac{24}{12}=2$ (66). Generaliter $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=\frac{anp+bmp+cmn.}{mnp}$

Demonstratio satis patet, uti & sequentis problematis.

70. PROBLEMA. *Fractionem datam e dato numero subtrahere.*

Resolutio. *Regula I.* Si fractio subtrahenda est e fractione; reducantur ambæ ad idem nomen, & numerator solus subtrahatur e numeratore, manente communi denominatore. E. g. $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc.}{bd}$

Regula II. Si fractio sit subtrahenda ex numero integro, mutetur unitas, dempta integro, in fractionem cognominem subtrahendæ (68). E. g. $6-\frac{3}{4}=5+\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=5\frac{1}{4}$.

Regula III. Si fractio fuerit subtrahenda ex integro & fracto; tum si adhærens integro fractio fuerit major subtrahenda, subtractio fit ex sola adhærente fractione E. g. $6\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=6\frac{10}{5}-\frac{9}{5}=6\frac{1}{5}$. Quodsi vero adhærens integro fractio minor fuerit subtrahenda: reductis fractionibus ad idem nomen, addatur fractioni minori unitas dempta ex integro, mutata in fractionem adhærenti cognominem. E. g. $6\frac{2}{5}-\frac{3}{4}=7\frac{8}{20}-\frac{15}{20}=6+\frac{20}{20}+\frac{8}{20}-\frac{15}{20}=6+\frac{28}{20}-\frac{15}{20}=6+\frac{13}{20}$.

71. THEOREMA. *Si divisor ducatur in numerum integrum, erit quotus per hunc divisorem obtentus quoti alias prodituri talis pars, qualem indicat numerus divisorem multiplicans.* E. g. quotus $\frac{a}{bc}$ est pars c quoti $\frac{a}{b}$.

Demonstratio. Est $\frac{a}{bc}$, $\frac{a}{b}=\frac{ab}{b^2c}$, $\frac{abc}{b^2c}$; jam vero $\frac{ab}{b^2c}$ continetur toties in altera $\frac{abc}{b^2c}$, quoties ab ea potest sub-

ſubtrahi; id eſt, quoties *ab* continetur in *abc*; continetur autem *ab* in *abc*, quoties *c* indicat, ſive *ceſies*: ergo $\frac{ab}{b^2c}=\frac{a}{bc}$ eſt pars *ceſima* de $\frac{abc}{b^2c}=\frac{a}{b}$. Ita E. g. $\frac{3}{4\times 2}$ eſt dimidium de $\frac{3}{4}$, ſive $\frac{3}{8}$ de $\frac{3}{4}$.

72. PROBLEMA. *Fractiones multiplicare.*

RESOLUTIO. *Regula I.* Si fractio multiplicanda eſt per integrum, multiplicetur ſolus numerator per integrum, manente denominatore. E. g. $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$. $\frac{3}{7}\times 2=\frac{6}{7}$. Unde etiam eſt (17) $c\times\frac{a}{b}=\frac{ac}{b}$; nam $c\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$.

Regula II. Quando fractio per fractionem multiplicanda eſt, erit factum fractio, cujus numerator ſit factum numeratorum, denominator factum denominatorum. E. g. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

Regula III. Quando numeri integri, quibus adhærent fractiones, ſunt multiplicandi; ſinguli termini unius ducantur in omnes alterius. E. g. $(a+\frac{b}{c})m=am+\frac{bm}{c}$. Et $(a+\frac{b}{c})(m+\frac{d}{e})=am+\frac{bm}{c}+\frac{ad}{e}+\frac{bd}{ce}=am+\frac{bem+acd+bd}{ce}$. Ita $3\frac{2}{3}\times 4=12\times\frac{8}{3}=14+\frac{1}{3}$. Et $(3\frac{2}{3})\times(4\frac{3}{4})=12+\frac{8}{3}+\frac{9}{4}+\frac{16}{12}=16+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=16+\frac{16+6+12}{24}=16+\frac{34}{24}=17\frac{10}{24}=17\frac{5}{12}$.

DEMONSTRATIO. *Regulæ I.* Fractio ducta in integrum eſt additio fractionis ad ſeipſam toties facta, quoties unitas eſt in integro (15) ergo cum additio fiat in ſolo numeratore (69): etiam multiplicatio per integrum fit in ſolo numeratore.

Regulæ II. In omni facto multiplicandus ita debet contineri, ſicut unitas in multiplicatore (14): cum ergo in hac multiplicatione $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$, unitas non integra, ſed tantum partes *de*ſimæ tot, quot *c* indicat, contineantur in multiplica-

plicatore $\frac{c}{d}$, etiam multiplicandus $\frac{a}{b}$ non integer, ſed ejus partes *d*eſimæ tot, quod *c* indicat, debent contineri in facto. Ergo ut habeantur multiplicandi $\frac{a}{b}$ partes *d*eſimæ, fiat $\frac{a}{bd}$ (71) dein hæ partes toties accipiantur, quoties *c* indicat; ſive fiat $\frac{a}{bd} \times c$ erit factum $= \frac{ac}{bd}$. Cetera per ſe ſunt manifeſta.

73. COROLLARIUM. Fractio fractionis dum occurrit, adhibenda eſt multiplicatio E. g. $\frac{c}{d}$ de $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}$. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

74. COROLLARIUM 2. Numerus quivis ſeu integer, ſeu fractus ductus in fractionem dat factum multiplicando minus, quia hic non integer accipitur.

75. PROBLEMA. *Dividere fractiones.*

RESOLUTIO. *Regula I.* Fractio dividitur per integrum, multiplicando ſolum denominatorem per integrum. E. g. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$. $\frac{3}{4} : 6 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Regula II. Integer dividitur per fractum, ſi multiplicetur per hunc fractum inverſum. E. g. $a : \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$. $2 : \frac{4}{5} = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$.

Regula III. Fractio dividitur per fractionem, ſi dividendus ducatur in fractum diviſorem inverſum. E. g. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Regula IV. Numerus, integer cui, adhæret fractio, mutetur in fractionem unam ſpuriam (68) & ſerventur priores regulæ. E. g. $(a + \frac{b}{c}) : (m + \frac{d}{e}) = \frac{ac+b}{c} : \frac{me+d}{e} = \frac{ac+b}{c} \times \frac{e}{me+d} = \frac{ace+be}{mce+cd}$. $3\frac{2}{3} : 2\frac{3}{4} = \frac{11}{3} : \frac{11}{4} = \frac{11}{3} \times \frac{4}{11} = \frac{44}{33} = 1\frac{11}{33} = 1\frac{1}{3}$.

DEMON-

DEMONSTRATIO. In his omnibus factum ex quoto in divisorem restituit dividendum, ut consideranti patet: ergo rite dividitur juxta datas regulas.

76. COROLLARIUM. Quicunque numerus per fractum divisus dat quotum dividendo majorem, cum divisor sit unitate minor, adeoque sæpius in dividendo contineatur, quam unitas: ergo quotus major erit, quam si divisio fieret per unitatem, hoc est, si maneret quotus ipse dividendus; est enim $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b}$. * Reductio ad nomen datum fractionis requirit notitiam proportionum, unde agetur de ea inferius (174).

ARTICULUS III.

Fractiones decimales.

77. DEFINITIO. *Fractiones decimales* sunt totius cujusvis partes decimæ, centesimæ, millesimæ. Unde harum fractionum denominator est 1 cum zeris. E. g. $\frac{3}{10}$. $\frac{5}{100}$. $\frac{4}{1000}$ &c.

78. HYPOTHESIS. Ad facilitandas operationes fractiones decimales a variis varie exprimuntur, uti videre est in adjecto schemate; in quo columna *a* exhibet integra 5; columna *b* decimas 3; columna *c* centesimas 4; columna *d* millesimas nullas &c. Expressio primæ & secundæ seriei ferme simplicior in usu est. Quodsi integra desint, in eorum loco ponitur zerus, sicut dum decimales quædam desunt. E. g. 0.3405.

a.	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*
5.	3	4	0	7	8
5,	3	4	0	7	8
	I	II	III	IV	V
5°	3	4	0	7	8
5	(3	4	0	7	8)V
5	3	4	0	7	8(V

79. COROLLARIUM 1. Igitur valor fractionum decimalium non mutatur quotcunque adjectis ad dextram zeris E. g. 5.3 = 5.3000 &c. Item 0.3 = 0.300 &c. Item 0.03 = 0.0300. Imo integro, manente valore, quotcunzeri adjiciuntur E. g. 25 = 25.000 &c.

80. COROLLARIUM 2. Fractiones igitur decimales facillime reducuntur ad vulgares, subscripta iis, ceu

deno-

denominatore, unitate cum tot zeris, quot fuerint decimales notæ. E. g. $0.3 = \frac{3}{10}$. & $0.34 = \frac{34}{100} = \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$. & $0.03 = \frac{3}{100}$. & $5.3 = \frac{53}{10}$; nam $5 = \frac{50}{10}$; sicut $1 = \frac{10}{10} = \frac{100}{100} = \frac{1000}{1000}$ &c. $= 1.0 = 1.000$ &c.

81. PROBLEMA. *Fractiones decimales addere.*

RESOLUTIO. Ponantur series addendæ ita infra sese, ut sibi respondeant integra, decimæ, centesimæ &c. Quodsi in una serie quædam decimales desint, ponantur, vel intelligantur ibi tot zeri. Additio autem fit, sicut in integris.

$$\text{E. g.}\quad \begin{array}{r} 3.4506\ .. \\ 8.5270\ 34 \\ \hline 11.9776\ 34 \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{r} 12.8003 \\ 0.75.. \\ \hline 13.5503 \end{array}$$

DEMONSTRATIO additionis & sequentis subtractionis per se manifesta est.

82. PROBLEMA. *Subtrahere fractiones decimales.*

RESOLUTIO patet ex additione (81).

$$\text{E. g.}\quad \begin{array}{r} 3.456 \\ 0.547 \\ \hline 2.909 \end{array} \quad \& \quad \left.\begin{array}{r} 3.4 \\ 2.034 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 3.400 \\ 2.034 \\ \hline 1.366 \end{array}$$

83. PROBLEMA. *Multiplicare inter se fractiones decimales.*

RESOLUTIO. Fiat multiplicatio, ut in integris; tum ex facto, incipiendo a dextra, abscindantur tot notæ, quot fuere decimales in utroque factore, reliquæ erunt integra. Quodsi in facto tot notæ non adsint, adjiciantur versus sinistram tot zeri, & insuper unus zerus in loco integrorum.

$$\text{E. g.}\quad \begin{array}{r} 23.456 \\ 0.23 \\ \hline .70\ 368 \\ 469\ 12 \\ \hline 5.39\ 488 \end{array} \quad \text{Item} \quad \begin{array}{r} 0.032 \\ 0.04 \\ \hline 0.00\ 128 \end{array} \quad \text{Item} \quad \begin{array}{r} 3.02 \\ 2. \\ \hline 6.04 \end{array}$$

DEMONSTRATIO. Mutentur factores & factum in fractiones vulgares, patebit rite fuisse multiplicatum.

84. PRO-

84. PROBLEMA. *Dividere fractiones decimales.*

RESOLUTIO. *Regula I.* Abſoluta, ut in integris, diviſione, ſubtrahatur numerus decimalium diviſoris ab illo dividendi: reſiduum indicabit, quot notæ quoti decimales a dextra ſint reſcindendæ. E. g. $\frac{2.46}{0.3} = 82 = 8.2$. Ita $\frac{0.0246}{3.0} = 82 = 0.082$. Ita $\frac{6:45}{3.} = 215 = 2.15$.

Regula II. Si numerus notarum dividendi minor fuerit illo diviſoris; adjiciantur dividendo tot zeri, ut diviſio peragi poſſit. E. g. $\frac{5.0}{2.50} = \frac{5.00}{2.50} = 2$. Ita $\frac{5.}{2.5} = \frac{5.0}{2.5} = 2$.

Regula III. Quodſi peracta diviſione fuerit reſiduum, adjice illi pro lubitu zeros, ut diviſio continuari poſſit, donec perveniatur in quoto ad decimales nullius momenti E. g. $\frac{4.}{2.34} = \frac{4.00000000}{2.34} = 1.709401$ &c., cui quoto jam ne pars quidem unitatis integræ millioneſima deeſt.

DEMONSTRATIO eſt eadem, quæ multiplicationis (83). Vel quotus ductus in diviſorem reſtituet dividendum &c.

85. COROLLARIUM 1. Regula III. etiam locum habet in diviſione integrorum, ſiquid fuerit reſiduum; huic enim quotvis zeri, ceu decimales adjiciantur, & in quoto invenientur notæ decimales. E. g. $\frac{27}{4} = \frac{27.000}{4}$ &c. $= 6.75$. Ita $\frac{23}{7} = 3.28571$ &c.

86. COROLLARIUM 2. Si velis ex hoc numero 3.46 omittere centeſimas; rectius ſumes 3.5, quam 3.4, cum in 3.5 plus quidem accipias, quam oportet, eritque error aliquis; verum in 3.4. adhuc major erit error, cum omittas 6centeſimas, in primo vero errore tantum exceſſus eſt 4centeſimarum. Si vero in hoc 3.464 omittendæ eſſent milleſimæ, accipiendæ eſſent 3.46, non 3.47. Demum ſi ex 3.45, omittantur centeſimæ, idem erit error in exceſſu vel defectu, ſive ſumantur 3.4, ſive 3.5. At ſi ex hoc 3.451 omittere cupis milleſimas & centeſimas, rectius ſumes 3.5 &c.

87. COROLLARIUM 3. In Geometria pro mensura accipitur *pertica* = 10 *pedibus*: pes = 10 *digitis*: digitus = 10 *scrupulis primis*: scrupulum primum = 10 *secundis* &c. Unde perticæ erunt integra, pedes decimæ &c. Quare hunc numerum 3. 456 leges: tres perticæ, 4 pedes, 5 digiti, 6 lineæ &c. Porro in Geometria hi numeri semper solent reduci per zeros adjectos ad easdem decimales, & tam multiplicatio, quam divisio institui, sicut in integris; quia revera sicut tres perticæ sunt integra, ita & 30 pedes, vel 300 digiti possunt spectari ceu integra.

88. PROBLEMA. *Reducere fractiones vulgares ad decimales.*

RESOLUTIO. Numeratori ceu integro adjiciantur quotcunque zeri decimales: fiat divisio per denominatorem, qui & ipse consideretur ut integer. E. g. erit $\frac{3}{4} = \frac{3.00}{4.} = 0.75$. Cum vero sæpe adcurata divisio haberi nequeat, quotcunque zeri adjiciantur, observentur dicta superius (85. 86). Si fuerit reducenda $\frac{2}{3}$, invenies 0.66666 &c., in quo casu poteris adjicere 6 sine fine, cum semper idem sit residuum 2 &c. Igitur ultima nota erit = 7. (86).

CAPUT V.

Potentiæ, earumque Radices.

89. DEFINITIO 1. *Potentia* est quævis quantitas in unitatem, vel in seipsam ducta. *Potentia prima* est quantitas ducta semel in unitatem; cumque quævis quantitas possit considerari ceu ducta in unitatem, quævis potest esse prima potentia. E. g. $a = a \times 1$. $a^2 = a^2 \times 1$. $a^3 b^2 = a^3 b^2 \times 1$. &c. *Potentia secunda* est quantitas in seipsam semel ducta. E. g. $a^2 = a \times a$. Item $a^4 b^2 = a^2 b \times a^2 b$ &c. *Potentia tertia* est quantitas in se bis ducta, vel clarius, est quantitas ducta in suam potentiam secundam. E. g. $a^3 = a \times a \times a = a^2 \times a$. $a^6 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^4 \times a^2$ Ita *potentia quarta* est quantitas ducta in se ter,

vel

vel ducta in ſuam potentiam tertiam. E. g. $a^4 = a \times a \times a \times a = a^3 \times a$. Et ſic porro *potentia quinta*, *ſexta* &c. *Potentia indeterminata* eſt quantitas cum exponente indeterminato. E. g. a^m. Demum *potentia infinita* ſic exprimitur a^∞. Porro potentia ſecunda ſpeciali nomine vocatur *quadratum*; tertia *cubus*; reliquæ a gradu nomen obtinent, quarta, quinta &c.

90. COROLLARIUM. Potentia ſecunda neceſſario eſt poſitiva, ſive quantitas, e qua oritur, fuerit poſitiva, ſive negativa; nam eſt $a \times a = a^2$, & $-a \times -a = a^2$. At potentia tertia erit vel poſitiva, vel negativa, prout fuerit quantitas, unde oritur; nam eſt $a \times a \times a = a^3$, ſed $-a \times -a \times -a = -a^3$. Ita ex natura multiplicationis ſequitur, eſſe generaliter potentiam exponentis paris ſemper poſitivam: illam exponentis imparis vel poſitivam, vel negativam.

91. DEFINITIO 2. *Radix* eſt quantitas, e cujus multiplicatione oritur potentia; unde alia eſt *ſecunda* vel *quadrata*: alia *tertia* vel *cubica*: alia *quarta*, *quinta* &c. Radix *ſurda* eſt, quæ nullis numeris exprimi poteſt. E. g. radix quadrata numeri 2, quia nullus eſt numerus, qui in ſeipſum ductus producat 2. Signum radicis quadratæ eſt $\sqrt[2]{}$ vel communius $\sqrt{}$: radicis cubicæ $\sqrt[3]{}$: radicis quartæ $\sqrt[4]{}$ &c.: radicis *me*ſimæ $\sqrt[m]{}$. Inſcripti his ſignis numeri vel literæ ſunt *exponentes ſignorum radicalium*. Eadem igitur radix varia eſſe poteſt variarum ejusdem quantitatis potentiarum. E. g. $a = \sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[m]{a^m}$.

92. COROLLARIUM. Radix exponentis paris de potentia negativa eſt *impoſſibilis* ſeu *imaginaria*. E. g. $\sqrt{-a^2}$. Nam talis potentia eſt impoſſibilis (90); Licet quantitas $-a^2$ ſit poſſibilis, nempe $= a \times -a$.

ARTICULUS I.

Elevatio quantitatum ad quamvis potentiam.

93. PROBLEMA. *Elevare numerum datum ad quamvis potentiam.*

RESOLUTIO. Ducatur numerus datus in seipsum, factum erit quadratum: hoc ductum in ipsum numerum dat cubum: numerus idem in cubum ductus dat potentiam quartam &c.

DEMONSTRATIO est ipsa definitio (89).

94. PROBLEMA. *Elevare ad datam potentiam quantitates algebraicas incomplexas.*

RESOLUTIO. *Regula I.* Exponens quantitatis datæ ducatur in numerum, qui indicet gradum potentiæ. E. g. potentia tertia de a erit $= a^{1 \times 3} = a^3$. Ita potentia quarta de $a^3 = a^{3 \times 4} = a^{12}$; & generaliter potentia *n*esima de $a^m = a^{m \times n} = a^{mn}$.

Regula II. Si plures fuerint factores vel coëfficientes quantitatis monomiæ, singuli eleventur ad potentiam quæsitam. E. g. potentia tertia de $a^2 b^3$ erit $= a^{2 \times 3} b^{3 \times 3} = a^6 b^9$. Ita potentia secunda de $4a^2 b^3 = 16 a^4 b^6$. Generaliter $a b^m c^r$ elevata ad potentiam *n*esimam erit $= a^n b^{mn} c^{nr}$.

Regula III. Ut fractio elevetur ad potentiam, ad eandem elevetur tam numerator, quam denominator. E. g. potentia *n*esima de $\frac{a^m}{b^r} = \frac{a^{mn}}{b^{nr}}$. Quod etiam in numeris locum habet. E. g. cubus de $\frac{2}{3}$ erit $= \frac{8}{27}$. Et cubus de $2.34 = 12.812904$. Demum quadratum de $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{121}{144} = 2 + \frac{1}{144}$.

DEMONSTRATIO patet ex natura multiplicationis, & definitione (89).

95. THEOREMA. *Potentia exponentis fracti positivi æquatur radici, cujus exponens sit fractionis denominator, de potentia, cujus exponens sit fractionis numerator.*

sive est $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

DEMON-

DEMONSTRATIO. $a^{\frac{m}{n}}$ elevetur ad potentiam $n$esimam, fiet $a^{\frac{m}{n} \times n}$ (94) $= a^{\frac{mn}{n}} = a^m$: ergo a^m est potentia $n$esima de $a^{\frac{m}{n}}$: ergo $a^{\frac{m}{n}}$ est radix $n$esima de a^m; id est $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

96. THEOREMA. *Potentia exponentis fracti negativi æquatur ejus coëfficienti diviso per radicem, cujus exponens sit fractionis illius denominator, de potentia, cujus exponens sit fractionis numerator positivus.* Sive est $ab^{-\frac{m}{n}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$,

DEMONSTRATIO. Est $ab^{-\frac{m}{n}} = b^{\frac{a}{\frac{m}{n}}}$ (40) $= \sqrt[n]{b^m}$ (95). Unde etiam $b^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b^m}}$.

97. PROBLEMA. *Evehere radicem binomiam $a+b$ ad quamvis potentiam.*

RESOLUTIO est eadem, quæ de numeris (93). Unde erit $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$. Ita $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, Ita $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, Demum $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Et sic deinceps.

DEMONSTRATIO est iterum ipsa definitio (89).

98. COROLLARIUM. Ex consideratione ultimi problematis varia oportet observare. 1mo. Termini sunt uno plures, quam sit exponens maximus potentiæ. 2do. Exponens termini primi a continuo decrescit unitate donec in ultimo termino evanescat: alterius vero notæ b, quæ in primo termino deest, continuo unitate crescit. 3tio. Coëfficiens termini primi & ultimi est unitas: coëfficiens termini secundi habetur, si primæ notæ a exponens maximus

dividatur per minimum de b. E. g. in potentia quinta eſt $= \frac{5}{1} = 5$: Ita coëfficiens termini tertii habetur, ſi factum exponentium duorum primorum de a dividatur per factum coëfficientium duorum de b: ſic in eadem potentia quinta erit coëfficiens termini tertii $= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$. Ita porro in eadem potentia erit coëfficiens termini quarti $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$. uti termini quinti $= \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$. ultimi $= \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 1$.

99. PROBLEMA. *Breviore via evehere* $a + b$ *ad quamvis potentiam.*

A.	a^5.	a^4.	a^3.	a^2.	a^1.	a^0.
B.	b^0.	b^1.	b^2.	b^3.	b^4.	b^5.
C.	$a^5 b^0$.	$a^4 b^1$.	$a^3 b^2$.	$a^2 b^3$.	$a^1 b^4$.	$a^0 b^5$.
D.	$\frac{5}{1}$,	$\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$,	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$,	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.	
E.	$a^5 + 5a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$.					

RESOLUTIO. In ſerie A ponatur a cum exponente maximo, dein continuo decreſcente, ut in adjecto ſchemate, pro potentia quinta conſtructo: in ſerie B contrarium fiat de nota b. In ſerie C ponantur facta utriusque ſeriei præcedentis ex notis a & b ſibi reſpondentibus. In ſerie D ſunt coëfficientes termini ſecundi & ſequentium, ex corollario præcedente (98). Et ita in ſerie E habebitur quæſita potentia binomii $a + b$.

DEMONSTRATIO tota continetur in corollario præcedente (98).

100. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem cujusvis potentiæ binomii* $a + b$.

RESOLUTIO. Exponens maximus vocetur m, præcedens formula (99) abibit in hanc: $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4$ &c. Jam vero ſi fiat $a = P$, $\frac{b}{a} = Q$; dili-

diligentius examinanti patebit, ultimam hanc formulam concinnius & generalius ita exprimi:

$$P^m = A = a^m.$$

$$\frac{m}{1} AQ = B = \frac{m}{1} a^{m-1}b.$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = C = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2.$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = D = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3.} a^{m-3}b^3.$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = E = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2. \quad 3. \quad 4.} a^{m-4}b^4.$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = F = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5} a^{m-5}b^5 \text{ &c.}$$

Atque hinc lex adparet, qua facillime pro quavis potentia continuari formula queat; donec scilicet habeantur termini uno plures, quam sit exponens maximus potentiæ quæsitæ (98). Imo si acciperetur terminus ultra debitos, fieret is = 0. E. g. pro potentia quarta terminus ultimus foret E; sequens enim F foret $\frac{m-4}{5} EQ = \frac{4-4}{5} EQ = 0$.

101. COROLLARIUM 1. Usus præcedentis formulæ generalis perquam manifestus est. Sit $a+b$ evehendum ad potentiam quartam, erit primus terminus $P^m = a^4$: alter $\frac{m}{1} AQ = \frac{4}{1}. a^4. \frac{b}{a} = 4a^3b$: tertius $\frac{m-1}{2} BQ = \frac{4-1}{2}. 4a^3b. \frac{b}{a} = \frac{3}{2}. 4a^2b^2 = \frac{12}{2} a^2b^2 = 6a^2b^2$. quartus $\frac{m-2}{3} CQ = \frac{4-3}{3}. 6a^2b^2 \frac{b}{a} = 4ab^3$. Demum ultimus $\frac{m-3}{4}. DQ = \frac{4-3}{4}. 4ab^3. \frac{b}{a} = b^4$ &c.

102. COROLLARIUM 2. Evectio quantitatis polynomiæ ad potentiam ferme solet tantum indicari E. g. $(a+b-c)^2$. Quodsi nihilominus talis evectio peteretur, fiat multiplicatione (89). E. g. erit $(a+b-c)^2 = (a+b-c)(a+b-c) = a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$ &c. Porro potentiæ modis indicatis inventæ sunt *perfectæ*: *imperfectæ*

perfectæ erunt, ſiquid in iis aut deſuerit, aut abundaverit. E. g. a^2+2ab eſt quadratum imperfectum de $a+b$. Ita 5 eſt quadratum imperfectum de 2 vel de 3.

103. COROLLARIUM 3. Ex evectione quantitatis polynomiæ ad potentiam quamcunque conſtat, in quavis tali potentia contineri perfectam ejusdem gradus potentiam, de duabus, & de tribus, & de quatuor &c. primis notis radicalibus. E. g. in $(m+n+p+q)^2$ habetur $(m+n)^2$ & $(m+n+p)^2$ &c. Unde ſi primum fiat $m=a$, $n=b$, erit $(m+n)^2=a^2+2ab+b^2$: quodſi dein fiat $m+n=a$, $p=b$, erit $(m+n+p)^2=a^2+2ab+b^2$; e quo ſi ablatum ſit $(m+n)^2=a^2$, reſiduum erit $2ab+b^2$. Demum ſi fiat $m+n+p=a$, $q=b$, erit $(m+n+p+q)^2=a^2+2ab+b^2$, e quo ſi ablatum ſit $(m+n+p)^2=a^3$, erit reſiduum $2ab+b^2$ &c. Quæ hic de quadrato dicta ſunt, eadem plane ratione vera invenientur in quavis potentia radicis polynomiæ quotcunque quantitatum. Imo in numeris prorſus eadem evenire patet: E. g. in $(2345)^2=(2000+300+40+5)^2$ contineri & $(2000+300)^2$ & $(2000+200+40)^2$ apertum eſt, cum poſſit fieri $2000=m$, $300=n$, $40=p$, $5=q$. &c. Huic corollario ceu fundamento innititur extractio radicum ope formulæ binomii $a+b$, de qua aget

ARTICULUS II.

Extractio radicis e potentia data.

104. THEOREMA. *Si potentia quævis numerica ita dividatur in claſſes, ut cuivis claſſi, incipiendo a dextra, tot notæ aſſignentur, quot ſunt unitates in exponente potentiæ, excepta claſſe ultima ſiniſtima, quæ poſſit eſſe unius etiam notæ: tot erunt claſſes, quot fuere notæ radicales.*

DEMONSTRATIO petitur ab inductione ſingularum potentiarum: E. g. ſit ſermo de quadrato: radix unius notæ minima eſt 1, maxima 9; utriusque quadratum eſt unius claſſis, ſcilicet 1 & 81. Ita radices duarum notarum minima 10, maxima 99 dant quadrata duarum claſſium 100 & 9801. Ita radices trium notarum minima 100, maxima 999 dant

dant quadrata trium classium 10000 & 98901 &c. Idem observare licet in quavis potentia altiore.

105. COROLLARIUM. Igitur & tot erunt notæ radicales, quot fuere classes potentiæ. Unde data potentia mox intelligitur, quot sint inveniendæ notæ radicales, quarum proin & valor localis cognoscitur.

Radix	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadratum	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Por. quarta	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
Por. quinta	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049

106. HYPOTHESIS. Habeatur præcedens tabella pro potentiis radicum ab 1 ad 9; quæ facile perduci poterit ad quamvis altiorem potentiam. Ex hac tabella habetur radix e potentia unius classis; potentia autem quævis de radice 1 est pariter 1.

107. PROBLEMA. *Invenire radicem potentiæ datæ numericæ perfectæ quadratam.*

$a^2 + 2ab + b^2$ | $a + b$ | M $2a + b$

14.97.69 | $a + b$. | 6 8

9 | 3 87 | 8

5 9,7 | | 544 = $2ab + b^2$

5 4 4 | | $2a + b$

5 3 6,9 | | 767

5 3 6 9 | | 7

0 | | 5369 = $2ab + b^2$

RESOLUTIO. Sit quadratum 149769. videatur adjectum schema.

Regula I. Formula binomii ad quadratum evecti ponatur semper ob oculos $= a^2 + 2ab + b^2$. Tum dividatur datus numerus in classes (104) per puncta, erunt in isto numero classes tres; igitur tres notæ radicales erunt

inveniendæ, quarum ſiniſtima erit centenaria, altera decadica &c.

Regula II. Claſſis ſiniſtima, quæ hic eſt 14, vocetur a^2, cujus radix a eſt invenienda. Quæratur ergo quadrati 14, ope tabellæ ſuperioris (106) radix vera, vel vera proxime minor, ſi adcurata non adſit; erit hæc $=3$. Igitur inventa eſt prima nota radicalis $=3$, ponenda infra a. Fiat $a^2=3\times3=9$, quæ ſubtrahatur e quadrato 14: reſiduo 5 junge ſequentem 97, erit 597, e quo numero virgula ſejunge notam ultimam 9 adjectæ claſſis, fiet 59, 7.

Regula III. Cum jam e quadrato 1497 duarum primarum notarum radicalium $a+b$ ſubtractum ſit $a^2=9$: erit in 59, 7 adhuc $2ab+b^2$ (103): & quidem in 59 erit $2ab$: cum autem ſit $\frac{2ab}{2a}=b$, invenietur altera nota radicalis b, ſi $2ab$ dividas per $2a$, id eſt 59 per 6. Hunc igitur diviſorem $6=2a$ ſcribe in loco ſeparato M, per eum divide 59: inventum quotum, qui novenario major eſſe non debet, pone juxta diviſorem, eritque $2a+b=68$: per eundem quotum $8=b$ multiplica $68=2a+b$: factum $=544=2ab+b^2$ ſubtrahe ex 597: reſiduo, ut prius, adjice claſſem ſequentem, fiet 536, 9. Atque ita inventæ erunt duæ notæ radicales $38=380$.

Regula IV. Fiant notæ inventæ $38=380=a$; nota tertia invenienda $=b$: erit e toto quadrato ſubtractum $(380)^2=a^2$, & 536, $9=2ab+b^2$ (103). Et, ut prius, in 536 erit $2ab$; igitur iterum fiat $\frac{2ab}{2a}=\frac{536}{76}=b=7$: fiat $2a+b=387$, ducatur in $b=7$; factum ſubtrahatur e 5369: quæ omnia in N exhibentur. Cumque jam nihil ſuperſit, inventa eſt vera radix $=387$. Quodſi ſupereſſent plures claſſes, eadem methodo invenirentur reliquæ notæ radicales, dum omnes jam inventæ fiunt $=a$ &c.

Regula V. Si aſſumpto quoto $=b$, factum $2ab+b^2$ foret majus, quam ut e numero ſubtrahi poſſet; quotus b juſto major eſt. Sic in M $2a=6$ continetur in 59 novies; at aſſumpto quoto $b=9$, factum $2ab+b^2$ fiet juſto majus: igitur b non eſt 9, ſed 8.

Regu.

Regula VI. Si in aliqua classe pro quoto *b* occurrat zerus, etiam in notis radicalibus pro *b* ponitur zerus: & tum, manentibus omnibus, adjungitur sequens classis. Quodsi, inventis una vel pluribus notis radicalibus, solæ classes meris zeris constantes supereſſent, sine reſiduis notis significantibus; in radice tot adjiciantur zeri, quot superfuerint zerorum classes; ita quadrati 25.00.00 radix vera est 500. Cum autem absolutis omnibus adhuc fuerit reſiduum, id indicio erit, quadratum datum esse imperfectum, de quo agetur inferius (112).

Demonstratio. *Regulæ II. & III.* Esse in prima classe sinistima, $14 = 140000$, a^2, seu quadratum primæ notæ radicalis, ita ostenditur: prima nota radicalis, *a*, cum tres sint inveniendæ (105) erit centenaria: igitur ejus quadratum a^2 est inter decades millenariorum; nam $100 \times 100 = 10000$. Sed sola prima classis $14 = 140000$ est inter decades millenariorum; ergo in hac sola est a^2. Eadem ratione ostenditur esse $2ab$ in $59 = 59000$: Cum enim *a* sit nota centenaria, *b* vero nota decadica, factum $2ab$ erit factum decadum in centenarios, quod cum fiat millenarium, nam $100 \times 10 = 1000$, erit $2ab$ in millenariis; solæ autem notæ $59 = 59000$ sunt millenariæ: igitur in his solis continetur $2ab$ &c. Cætera eodem modo, & ex Corollario (103) intelliguntur.

108. PROBLEMA. *E dato numero perfecte cubico extrahere radicem cubicam.*

Resolutio. Sit numerus propositus 57960603. Ponatur ob oculos formula binomii $a + b$ pro cubo (97. &c.) Dividatur numerus in classes (104) tres; uti in adjecto schemate; tum serventur sequentes regulæ.

Regu-

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a + b$	M. $3a^2 = 27$
57. 960. 603	$\overbrace{a+b}$.	$3a^2b = 216$
27	387	$3ab^2 = 576$
30 9,60		$b^3 = 512$
27 872		27872
3 0886, 03		N, $3a^2 = 4332$
30886 03		$3a^2b = 30324$
9		$3ab^2 = 5586$
		$b^3 = 343$
		3088603

Regula I. Ex classe finistima $57 = a^3$ quæratur a in tabella (106) quæ erit $= 3$ prima nota radicalis. Subtracto $a^3 = 27$ e 57; residuo adjiciatur classis altera, eritque 309, 60.

Regula II. In 309, erit $3a^2b$: fiat ergo $\frac{3a^2b}{3a^2} = b = \frac{309}{27} = 8$. Erit $8 = b$ altera nota radicalis. Tum fiant singula producta formulæ, scilicet $3a^2b + 3ab^2 + b^2$, ponanturque, uti in M, ita, ut notæ dextimæ semper recedant uno loco versus dextram: summa horum factorum subtrahatur ex 309, 60: residuo jungatur classis sequens, erit 30886, 03.

Regula III. Fiant binæ notæ inventæ $38 = 380 = a$, nota tertia adhuc inveniendа $= b$; cum jam e toto numero subtractus sit cubus $(380)^3 = a^3$, reliqua 30886, 03 erunt $3a^2b + 3ab^2 + b^2$. Et quidem in 30886 erit $3a^2b$; unde iterum fiat $\frac{3a^2b}{3a^2} = \frac{30886}{4332} = b = 7$. Erit nota tertia radicalis $b = 7$. Fiant, in N, producta formulæ $3a^2b + 3ab^2 + b^3$: eorum summa subtrahatur e classe tertia cum priore residuo; cumque nihil supersit, erit vera radix cubica inventa 387 e numero dato perfecte cubico. Eadem prorsus ratione invenirentur plures notæ radicales, si plures forent classes, semper faciendo notas omnes inventas $= a$. Cetera ex dictis de quadrato (107) intelliguntur, uti &

DEMONSTRATIO.

DEMON-

109. COROLLARIUM 1. Examen inventæ radicis duplex inſtitui debet. Ut ſcias, radicem inventam non eſſe juſto majorem, eleva eam ad potentiam datam, & adjice, ſiquod fuerit, reſiduum: ſi fuerit reſtitutus numerus datus, radix non eſt juſto major. Porro eandem non eſſe juſto minorem, intelliges, ſi eam unitate auctam eleves ad potentiam datam.

110. COROLLARIUM 2. Qui dicta de quadrata & cubica radice inveniendæ rite perceperit, facile quamvis radicem e potentia quavis altiore inveniet ope formulæ binomii $a+b$ conſtructa pro data potentia.

111. THEOREMA. *Potentiæ cuivis numericæ, in loco decimalium quotvis zerorum claſſes adjici poſſunt, manente priore valore.*

Demonstratio Cuivis radici adjici poſſunt quotvis zeri decimales (79): ergo vi multiplicationis decimalium (83.) tot erunt in quavis potentia zerorum claſſes, quod zeri adjecti fuerint radici. E. g. radix $2=2.0=2.00=2.000$ &c. dat quadratum $=4.=400=4.00.00=4.00.00.00$ &c. eadem radix dat cubum $=8.=8.000=8.000.000=8.000.000.000$ &c. Unde claſſes hæ zerorum ſemper ſunt integræ. Quare ſi detur talis potentia, ubi claſſes iſtæ non ſunt integræ, compleri debent adjectis zeris. E. g. quadratum 36.2 fiat $=36.20=36.20.00$ &c. Ita cubus 27.5 fiat $=27.500=27.500.000$. &c.

112. PROBLEMA. *Ex numero non perfecte quadrato extrahere radicem veræ ſemper propiorem.*

Resolutio. Sit E. g. numerus datus 156: inveniatur ex dictis (107) radix quadrata, quæ erit $=12$; at reſiduum erit $=12$; cui addatur nova claſſis zerorum (111) erit 120, 0. Quodſi jam ſiat $12=a$, erit in $120,0$ $2ab+b^2$: & $\frac{2ab}{2a}=\frac{120}{24}=4=b$. Radix ergo inventa erit $=12.4$; ſi reſiduo adjiciatur nova claſſis zerorum, erit $=2240,0$ &c. Invenietur ergo radix $=12.48995$ &c. & adjectis ſemper novis zerorum claſſibus invenietur radix ſemper veræ propior; licet nunquam ad veram radicem perve-

perveniatur. Demonſtratur enim ab aliis, ex radice mixta ex integris & fractione nunquam haberi perfectam ſolorum integrorum potentiam.

DEMONSTRATIO continetur aperte in præcedente theoremate (111), ſit enim numerus datus $156 = 156.00000000$ &c.

113. COROLLARIUM. Eodem modo, per *ad proximationem*, invenietur quævis radix altiorum potentiarum veræ ſemper propior; ſi adjiciantur claſſes zerorum, trium pro cubo, quatuor pro potentia quarta &c.

114. PROBLEMA. *Extrahere radicem quamlibet e potentia algebraica monomia.*

RESOLUTIO. Dividatur exponens cujusvis notæ in potentia per numerum, qui ſit exponens radicis quæſitæ. E. g. $\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$. $\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a$. $\sqrt[4]{a^4 b^8} = a^{\frac{4}{4}} b^{\frac{8}{4}} = ab^2$ Imo $\sqrt[3]{6ab} = 6^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$. Generaliter $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

DEMONSTRATIO jam ſupra (95) data eſt.

115. PROBLEMA. *Extrahere radicem e potentia algebraica polynomia.*

RESOLUTIO. *Regula I.* Sit potentia data perfecta E. g. quadratum $4m^2 + 12cmx + 9c^2x^2 - 4dmy - 6cdxy + d^2y^2$. Adhibita conſueta formula binomii $a^2 + 2ab + b^2$; erit a^2 in $4m^2$; unde $a = 2m$; & $2ab = +12cmx$, unde $\frac{2ab}{2a} = \frac{12cmx}{4m} = b = +3cx$. Ergo duæ primæ notæ radicales inventæ erunt $2m + 3cx$, quæ fiant $= a$. Ita porro $\frac{2ab}{2a} = \frac{-4dmy - 6cdxy}{4m + 6cx} = -dy = b$: ergo tota radix vera erit $= 2m + 3cx - dy$. Cetera fiant in his, uti in numeris. Eodem modo extrahitur radix e quavis perfecta potentia.

Regula II. Ex potentiis imperfectis invenitur radix ſemper veræ propior, ſi reſiduum vocetur $2ab + b^2$. Per-

commo-

commode etiam hic adhibetur formula generalis (100) in qua P eſt primum quadratum vel cubus &c. polynomii, m eſt fractio, cujus numerator eſt unitas, denominator 2 vel 3 &c: ergo pro quadrato fit $m = \frac{1}{2}$; ſicut pro cubo $m = \frac{1}{3}$ &c. denique Q eſt omnis reliqua quantitas polynomii diviſa per primum ejus quadratum vel cubum &c. E. g. quæratur radix quadrata ex hac potentia imperfecta $d^2 + x^2$; erit P $= d^2$; $m = \frac{1}{2}$; $Q = \frac{x^2}{d^2}$! $P^m = d$. Unde jam ſine fine poſſunt, pro ſigulis nempe formulæ generalis terminis ſingulæ notæ radicales inveniri. Cum vero in elementari algebra rarior ſit hujus problematis uſus; plura non addimus, quæ viva voce clarius exponi poterunt; ſolent plerumque ita exprimi $\sqrt{(d^2 + x^2)}$.

ARTICULUS III.

Calculus quantitatum radicalium.

116. DEFINITIO. *Quantitas radicalis* eſt, cui ſignum radicale $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$ &c. $\sqrt[n]{}$ præfixum eſt. Quando pluribus præfixum eſt ſignum radicale ejusdem exponentis, vocantur *ejusdem* denominationis E. g. $\sqrt[n]{a^r}$ & $\sqrt[n]{b^s}$: alias dicuntur *diverſæ denominationis* E. g. $\sqrt[m]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$. Quodſi quantitates ejusdem denominationis habeant poſt ſigna radicalia easdem literas vel notas, vocantur *communicantes* E. g. $a\sqrt[n]{b^m}$ & $c\sqrt[n]{b^m}$. Item $3\sqrt[3]{7}$ & $5\sqrt[3]{7}$; licet coëfficientes ſigno præfixi fuerint diverſi.

117. PROBLEMA. *Quantitates radicales reducere ad eandem denominationem.*

RESOLUTIO. Sint quævis quantitates diverſæ denominationis hæ $\sqrt[m]{a^r}$ & $\sqrt[n]{b^s} = a^{\frac{r}{m}}$ & $b^{\frac{s}{n}}$ (95); Reducantur exponentes fracti ad idem nomen, erit (62) $a^{\frac{r}{m}}$ & $b^{\frac{s}{n}}$ $= a^{\frac{rn}{mn}}$ & $b^{\frac{ms}{mn}} =$ (95) $\sqrt[mn]{a^{rn}}$ & $\sqrt[mn]{b^{sm}}$. Ita $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5} = 2^{\frac{1}{2}}$ & $5^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}}$ & $5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

118. THEO-

118. THEOREMA. *Si inter factores quantitatis radicalis unus vel plures fuerint ejusdem gradus cum ſigno radicali, manente valore radices horum factorum præponi poſſunt ceu coëfficientes ſigno radicali, manentibus ceteris factoribus poſt ſignum.*

DEMONSTRATIO. Sit generaliter $d\sqrt[n]{a^m b^n} = d.\overline{a^n}^m.\overline{b^n}^n = d.b.\overline{a^n}^m = b\,d\sqrt[n]{a^m}$. Ita erit $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$.

119. COROLLARIUM. Viciſſim ergo quantitas extra ſignum poſita poterit elevata ad potentiam ſigni ceu factor poni intra ſignum, ſive eſt $d\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m d^n}$. Ita $3\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{27.4} = \sqrt[3]{108}$. Porro factores quantitatis algebraicæ per ſe habentur, utpote ſingulæ literæ. factores vero quantitatis numericæ inveniuntur ex dictis (55).

120. PROBLEMA. *Datas quantitates radicales addere vel ſubtrahere.*

RESOLUTIO. Reducantur ad eandem denominationem; tum, ſi fuerint communicantes, additio & ſubtractio fit in ſolis coëfficientibus E. g. $\sqrt{18}+\sqrt{8} = \sqrt{9.2}+\sqrt{4.2} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Ita $\sqrt{18}-\sqrt{8} = 3\sqrt{2}-2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Quodſi non fuerint communicantes, habentur pro heterogeneis.

DEMONSTRATIO per ſe manifeſta eſt.

121. PROBLEMA. *Quantitates radicales multiplicare.*

RESOLUTIO. Reducantur ad eandem denominationem: tum multiplicentur inter ſe coëfficientes, & ipſæ etiam quantitates radicales, retento communi ſigno. E. g. $c\sqrt[n]{a^m} \times d\sqrt[n]{b^r} = c\,d\sqrt[n]{a^m b^r}$.

DEMONSTRATIO. Eſt $c\sqrt[n]{a^m} \times d\sqrt[n]{b^r} = ca^{\frac{m}{n}} \times db^{\frac{r}{n}} = cda^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{n}} = (95)\, cd\sqrt[n]{a^m b^r}$.

122. PRO-

122. PROBLEMA. *Quantitatem radicalem per aliam dividere.*

RESOLUTIO. Reductione ad eandem denominationem facta, dividantur coëfficientes inter se, & quantitates radicales inter se, retento communi signo. E. g. $c\sqrt[n]{a^m}$: $d\sqrt[n]{b^r} = \frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^r}}$.

DEMONSTRATIO. Est $c\sqrt[n]{a^m} : d\sqrt[n]{b^r} = ca^{\frac{m}{n}} : db^{\frac{r}{n}}$

$= \frac{c}{d} \times \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}} = \frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^r}}$.

123. PROBLEMA. *Quantitatem radicalem evehere ad quamvis potentiam.*

RESOLUTIO. Coëfficiens, si quis fuerit, rejiciatur post signum radicale (119): tum exponens signi dividatur per exponentem potentiæ datæ. E. g. $a\sqrt[m]{b^n}$ elevata ad potentiam r erit $= \sqrt[\frac{m}{r}]{a^m b^n}$.

DEMONSTRATIO. Est $a\sqrt[m]{b^n} = \sqrt[m]{a^m b^n} = a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{n}{m}}$; quæ quantitas elevata ad potentiam r erit (94) $= a^{\frac{mr}{m}} b^{\frac{nr}{m}}$ $= a^{m:r} b^{n:r} = \sqrt[\frac{m}{r}]{a^m b^n}$. Unde $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ evecta ad potentiam signi $n = a^{\frac{n}{n}} = a$.

124. RESOLUTIO. *E quantitate radicali quamvis radicem r extrahere.*

RESOLUTIO. Rejecto, ſiquis eſt, coëfficiente poſt ſignum, exponens ſigni multiplicetur per exponentem radicis quæſitæ r. E. g. radix r de $a\sqrt[m]{b^n}$ erit $=\sqrt[mr]{a^m b^n}$.

DEMONSTRATIO. Eſt $a\sqrt[m]{b^n} = \sqrt[m]{a^m b^n} = a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{n}{m}}$; cujus radix r (114) eſt $= a^{\frac{m}{m}:r} b^{\frac{n}{m}:r} = a^{\frac{m}{mr}} b^{\frac{n}{mr}} = \sqrt[mr]{a^m b^n}$.

CAPUT V.

Analyſis.

ARTICULUS I.

Principia artis analyticæ.

125. DEFINITIO. *Problema* hoc loco dicitur propoſitio, qua petitur, ut e datis quibusdam quantitatibus inveniatur valor unius vel plurium quantitatum incognitarum. Unde inter quantitates datas & inveniendas debent intercedere relationes, quæ problematis *conditiones* vocantur. In quavis autem conditione involvitur quædam æqualitas, quæ dicitur *æquatio*; hæc vero conſtat duobus *membris* per ſignum æqualitatis $=$ conjunctis. E. g. eſt problema: *data duorum numerorum ſumma & differentia, invenire ipſos numeros*: numeri, utpote incogniti vocabuntur x & y, ſumma data s, differentia data d; duæ erunt conditiones, totidemque æquationes, ſcilicet $x+y=s$ & $x-y=d$. Poteſt etiam membrum æquationis eſſe zerus, cum nempe alterius membri termini ſeſe elidunt E. g. $3x+5-3-2-3x=0$. Quodſi tot ſint æquationes, quot incognitæ, problema erit *determinatum*, quod vel unicam ſolutionem, vel determinatum ſolutionum numerum habet. Si plures fuerint incognitæ, a ſeſe haud dependentes, quam æquationes, problema erit *indeterminatum*, admittetque infinitas ſolutiones. Si plures fuerint æquationes, quam incognitæ, problema eſt *plus quam determinatum*, quod ſæpe involvit repugnantiam, &

ideo

ideo ſolvi nequit. Demum methodus ſolvendi problemata *analyſis* dicitur.

126. COROLLARIUM. Incognitæ quantitates non debent admitti plures, quam neceſſe ſit, nempe quot a ſeſe non dependent. E. g. in hoc problemate: *invenire duos numeros, quorum ſumma ſit data, & unus ſit alterius dimidium*; erit unica incognita; ſi enim primus numerus vocatur x, erit alter $\frac{x}{2}$; unde erit hæc unica æquatio: $x + \frac{x}{2} = s$. Porro nos agimus dumtaxat de problematis *primi & ſecundi gradus*; eſt autem problema primi gradus, in quo unica quantitatis incognitæ potentia invenitur. E. g. $x^2 = a^3 b$. Item $a x^2 + b x^2 = c$ &c.: ſecundi gradus eſt, in quo occurrit ſecunda & prima potentia incognitæ: E. g. $x^2 - a x = b$. Quando plures potentiæ quantitatis incognitæ occurrunt, problemata fiunt tertii, quarti &c. altiorum graduum E. g. $x^3 + a x^2 - 2x = b$ &c.

127. PROBLEMA. *Separare unam quantitatem incognitam ab omnibus aliis quantitatibus.*

RESOLUTIO. Cum omne artificium in eo verſetur, ut in æquationis uno membro habeatur ſola & unica incognita, in altero vero membro ejus valor per quantitates cognitas; id per ſequentes regulas obtinebitur:

Regula I. Quantitas quævis poteſt ex uno membro æquationis cum contrario ſigno tranſferri in alterum membrum; quæ transpoſitio *metatheſis* vocatur. E. g. $a + x - b = c$; fiet $x = b - a + c$. *Ratio* eſt, quia licet utrique membro, ſalva æqualitate, adjicere vel ab utroque auferre eandem quantitatem: ſed dum hoc fit, in uno membro eæ quantitates ſeſe elidunt, in altero comparent cum contrariis ſignis. In priore exemplo fieret $a + x - b - a + b = c - a + b$, ubi primum membrit jam eſt $= x$. Hac ergo metatheſi incognita poteſt ſeparari a cognitis per ſignum $+$ & $-$ ipſi adhærentibus.

Regula II. Incognita multiplicata per cognitam, ſeparatur ab hac diviſione utriusque membri per ipſam hanc cognitam. E. g. $a x = b$, fiet $\frac{a x}{a} = \frac{b}{a}$, ſeu $x = \frac{b}{a}$. Ita $a x - b x = c$, fiet $\frac{a x - b x}{a - b} = \frac{c}{a - b}$, ſive $x = \frac{c}{a - b}$. Ratio patet.

Regula III. Incognita implexa cognitis diviſione ſeparatur multiplicatione utriusque membri per diviſorem. E. g. $\frac{x}{a}=b$, fiet multiplicatione per a: $x=ab$. Ita $\frac{a}{x}=b$ fit $a=bx$; tum (Regula I.) $\frac{a}{b}=x$. Ubi obſervandum eſt: dum fractio ſeu propria, ſeu impropria multiplicatur per denominatorem ceu diviſorem, factum erit numerator; ita enim fractio ceu quotus ductus in diviſorem reſtituit dividendum. E. g. $\frac{x}{a}\times a=x$. Ita $\frac{a}{x}\times x=a$. Unde patet modus tollendi fractiones, ſi nempe omnes termini multiplicentur per ſingulos denominatores E. g. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=a$ fiet multiplicando per 2: $x+\frac{2x}{3}+\frac{2x}{4}=2a$: tum multiplicando per 3; $3x+2x+\frac{6x}{4}=6a$: demum ducendo in 4 fiet: $12x+8x+6x=24a$. Seu $26x=24a$. Unde (Regula II.) $x=\frac{24a}{26}=\frac{12a}{13}$.

Regula IV. Si incognita fuerit in membro uno ſola ſub ſigno radicali, evehatur utrumque membrum ad potentiam ſigni. E. g. $\sqrt{x}=a$ fiat $x=a^2$. Ita $a\sqrt[3]{x}=b$. Fiat $\sqrt[3]{x}=\frac{b}{a}$ & $x=\frac{b^3}{a^3}$. Ita $\sqrt[3]{ax}=b$ fiat $ax=b^3$: & (Regula II.) $x=\frac{b^3}{a}$. *Ratio* continetur in evectione radicalium ad potentiam (123).

Regula V. Quando eſt incognita ſola in uno membro, & evecta ad potentiam; ex utroque membro ejus potentiæ radix extrahatur. E. g. $x^3=a$; fiat $x=\sqrt[3]{a}$. Ita $ax^3=b$, erit $x^3=\frac{b}{a}$ & $x=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

Regula VI. Quando ſingulorum æquationis terminorum factor eſt incognita cum diverſis exponentibus; dividatur utrumque membrum per incognitam minimi exponentis; quodſi tum perveniatur ad æquationem, in qua unica

incognitæ potentia ſuperſit, ſolvetur ea ex præcedentibus. E. g. $ax^3 - bx^2 = cx^2$ fiat diviſio per x^2, erit $ax - b = c$, & $ax = b + c$, demum $x = \frac{b+c}{a}$. Ita $ax^3 - bx = cx$, fiet $ax^2 - b = c$; & $ax^2 = b + c$; & $x^2 = \frac{b+c}{a}$; demum (Regula V.) $x = \sqrt{\frac{b+c}{a}}$,

Regula VII. Si perveniatur ad æquationem, in cujus uno membro ſit incognitæ potentia ſecunda & prima tantum, in altero membro ſolæ cognitæ; erit problema ſecundi gradus: & ſiquidem in illo membro ſit perfectum quadratum radicis complexæ ex incognita & cognitis, habebitur ſolutio ex Regula V. E. g. $x^2 + 2ax + a^2 = b$, erit $x + a = \sqrt{b}$, & $x = \sqrt{b} - a$. Ut autem ſciatur, num quadratum ſit perfectum: dividatur ſumma omnium factorum incognitæ primæ potentiæ per 2; erit quotus altera pars radicis, cujus prima pars eſt ipſa incognita; quodſi etiam adſit quadratum hujus alterius partis; erit quadratum perfectum. E. g. $x^2 + 2ax + a^2 - 2bx - 2ab + b^2 = c$. Fiat $\frac{2a - 2b}{2} = a - b$; cujus quadratum eſt $a^2 - 2ab + b^2$; quod cum adſit in primo æquationis membro, erit ibi quadratum perfectum, cujus radix ſit $x + a - b$. Unde habetur: $x + a - b = \sqrt{c}$, & $x = \sqrt{c} - a + b$. *Ratio* petitur ex dictis de potentiis & radicibus Capite IV. Porro incognitæ quadratum ſemper ſit poſitivum.

Regula VIII. Quodſi perveniatur ad ejusmodi æquationem, in cujus altero membro ſit incognitæ potentia ſecunda & prima, ſed deſit quadratum ſecundæ partis radicis; tum id complendum eſt, utpote quadratum imperfectum; ſcilicet quadratum ſecundæ partis radicis, ex præcedente regula inveniendum, adjici debet, utrique æquationis membro. E. g. $x^2 - 2ax = b$; erit $\frac{-2a}{2} = -a$ altera pars radicis, cujus quadratum eſt $+a^2$; fiat ergo: $x^2 - 2ax + a^2 = a^2 + b$. Unde erit (Regula VII.) $x - a = \sqrt{(a^2 + b)}$ & $x = a \pm \sqrt{(a^2 + b)}$. Ubi probe obſervandum eſt, quamvis radicem quadratam ejusdem quadrati poſſe eſſe vel poſitivam, vel negativam (90) ideoque ſigno $\sqrt{}$ ſolet præfigi utrumque $\pm$, uti in ultimo exem-

plo vides. Quænam vero radix ſit ſumenda, poſitiva, an negativa, colligendum eſt ex conditionibus problematis; quandoque utraque ſatisfacit.

Regula IX. Quævis æquatio poteſt reduci ad ſecundum gradum, ſi in uno membro ſit incognita elevata ad potentiam maximam exponentis paris, & ad potentiam, cujus exponens ſit prioris dimidium. E. g. ſit $x^6 + 2ax^3 = b$: Fiat (Regula VIII.) $x^6 + 2ax^3 + a^2 = a^2 + b$: & $x^3 + a = \sqrt{(a^2 + b)}$ & $x^3 = \sqrt{(a^2 + b)} - a$. Demum (Regula V.) $x = \sqrt[3]{(\sqrt{(a^2 + b)} - a)}$. Ita $x^4 - x^2 = a$. Fiet (Regula VIII.) $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}$; & $x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{(a + \frac{1}{4})}$ & $x^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(a + \frac{1}{4})}$. Demum $x = \sqrt{(\frac{1}{2} \pm \sqrt{(a + \frac{1}{4})})}$.

Regula X. Si in pluribus æquationibus fuerint plures incognitæ, debent omnes præter unam eliminari per *ſubſtitutionem*, quæ ita fit; in prima æquatione quæratur valor unius incognitæ, quæ etiam occurrat in altera æquatione: hic valor in altera æquatione pro illa incognita ſubſtituatur, eritque jam una incognita eliminata. Ita porro agatur in ceteris. E. g. ſint duæ æquationes; $x + y = s$ & $xy = f$; erit ex prima æquatione $y = s - x$; valore hoc de y ſubſtituto in altera æquatione habebitur $xs - x^2 = f$; ubi unica eſt incognita; fiat jam incognitæ quadratum poſitivum per metatheſin, $-f = x^2 - xs$: compleatur quadratum, fiet $\frac{s^2}{4} - f = x^2 - xs + \frac{s^2}{4}$. Unde $x - \frac{s}{2} = \sqrt{(\frac{s^2}{4} - f)}$. Demum $x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{(\frac{s^2}{4} - f)}$. Idem fit, ſi fuerint plures incognitæ, ſenſim enim per ſubſtitutionem eliminantur. Quandoque compendium fit in eliminanda incognita. E. g. ſint duæ æquationes: $x + y = s$; $x - y = d$; addantur harum æquationum membra prima & ſecunda, erit $2x = s + d$, & $x = \frac{s+d}{2}$. Quodſi ſecunda æquatio ſubtrahatur e prima, erit $2y = s - d$, & $y = \frac{s-d}{2}$. Verum hæc & alia compendia diſcuntur potius uſu, qui, ſi non unicus, certe optimus eſt artis analyticæ Magiſter.

ARTI-

ARTICULUS II.

Problemata algebraica in arithmeticis.

128. PROBLEMA I. Sempronii teſtamentum hoc repertum eſt: Dimidium meæ pecuniæ $= \frac{x}{2}$ habebit Cajus hæres: quartam partem $= \frac{x}{4}$ lego templo meo parochiali: quintam partem $= \frac{x}{5}$ xenodochio: reliquos florenos 1000 $= a$ dividant inter ſeſe ſervi mei & ancillæ. Quæritur, quæ fuerit ſumma pecuniæ relictæ $= x$, quanta fuerit hæreditas, quanta ſingula legata? Ex conditionibus habetur hæc æquatio $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + a = x$. Ex Regula III. (127) erit $38x + 40a = 40x$. Unde $40a = 40x - 38x = 2x$. Demum $x = \frac{40a}{2} = 20a = 20000$ florenis. Patet ergo eſſe hæreditatem $= \frac{x}{2} = 10000$: legatum templo $= \frac{x}{4} = 5000$; legatum xenodochio $= \frac{x}{5} 4000$. &c. Examen porro ſemper inſtituendum, an problema ſit rite ſolutum, in eo conſiſtit, ut videatur, num inventus valor incognitæ ſatisfaciat omnibus problematis conditionibus.

129. PROBLEMA II. In eodem teſtamento pro diviſione florenorum 1000 $= a$ inter duos ſervos totidemque ancillas ſequens ordo fuerat præſcriptus: ſervus ſenior accipiat quadruplum ſervi junioris, demptis florenis 1000 $= b$: ſervus junior habeat triplum ancillæ ſenioris, demptis 100 $= c$: ancilla demum ſenior capiat duplum junioris, demptis 50 $= d$. Quæritur, quid cuivis obtigerit? Vocetur minima portio ancillæ junioris $= x$; erit illa ancillæ ſenioris $= 2x - d$: illa ſervi junioris $= 6x - 3d - c$: portio demum ſervi ſenioris $= 24x - 12d - 4c - b$: Unde ex conditione problematis habetur hæc æquatio: $33x - 16d - 5c - b = a$, & $x = \frac{a + 16d + 5c + b}{33} = 100$. Portiones igitur ex ordine problematis fuere: 400. 350. 150. 100.

130. PROBLEMA III. Antonius ſtudiorum amans inter egentiores Philoſophiæ auditores $23 = b$ diſtribuit

florenos $100=a$: ſingulis quidem DD. Phyſicis obtigere floreni $5=c$: ſingulis Logicis floreni $4=d$. Quæritur numerus Phyſicorum x, & Logicorum $b-x$? Erit: $cx+bd-dx=a$ &c. Unde $x=8$: $b-x=15$.

131. PROBLEMA IV. Abiit hinc curſor ante dies $4=a$, qui ſingulis diebus emetitur milliaria $6=b$: mittitur hodie alter, juſſus intra diem conficere milliaria $8=c$. Quæritur, intra quot dies $=x$ hic illum ſit aſſecuturus? Erit æquatio $ab+bx=cx$. Unde $x=\frac{ab}{c-b}=12$.

132. PROBLEMA. V. Eodem tempore duo abeunt, alter Wirceburgo Bambergam, qui indies conficit horas $3=a$: alter inde huc conficiens indies horas $5=b$: diſtat urbs utraque ho[illegible]$8=c$. Quæritur, quo die $=x$ ſibi ſint occurſuri? Æquatio: $ax+bx=c$, & $x=\frac{c}{a+b}=2\frac{1}{2}$.

133. PROBLEMA VI. Campo miſturus duo vini genera, ut miſti menſura vendi poſſit crucigeris $24=c$, quærit, quantum $=x$ debeat ſumi ex vino generoſiore, cujus menſura venit crucigeris $30=a$; quantum ex viliori $=1-x$, cujus menſura venditur crucigeris $20=b$. Ubi $1-x$ ſignificat 1 menſuram $-x$. Erit æquatio: $ax+b-bx=c$, & $x=\frac{c-b}{a-b}=\frac{2}{5}$, Unde quantitas vilioris $=\frac{3}{5}$ menſuræ.

134. PROBLEMA VII. Idem vino, cujus menſura venit crucigeris $24=a$, cupit miſcere quantitatem aquæ $=x$, ut miſti menſura fiat crucigerorum $20=b$. Erit quantitas vini $1-x$, & cum valor aquæ nullus ſit, erit æquatio; $a-ax=b$. & $x=\frac{a-b}{a}=\frac{1}{6}$.

135. PROBLEMA VIII. Bellidux diſtributurus præ, dam inter gregarios numero x, dum cuivis dat florenos $15=a$, ſuperſunt floreni omnino $575=b$: dat ergo cuivis florenos $20=c$; at jam deſunt floreni $50=d$, Aequatio: $ax+b=cx-d$. & $x=\frac{b+d}{c-a}=125$. Unde colligitur etiam ſumma pecuniæ $=ax+b=cx-d=2450$.

136.

186. PROBLEMA IX. Titius & Cajus ad luſum æqualem quisque attulerat pecuniæ ſummam $=x$: amiſit Titius florenos $57=a$, Cajus florenos $12=b$: luſu finito, Caji pecunia erat quadrupla pecuniæ reliquæ Titii. Quæritur x? Erat poſt luſum pecunia Titii $=x-a$; illa Caji $=x-b$: unde æquatio erit: $x-b=4(x-a)=4x-4a$ & $x=\frac{4a-b}{3}=72$.

137. PROBLEMA X. Pater animaturus filium ad ſtudia ſtrenue proſequenda, hæc ei promittit: quovis die, quo ſtudiis egregiam navaveris operam, dabo tibi crucigeros $10=a$: quo vero otio indulſeris, detraham crucigeros $15=b$. Elapſis diebus $30=c$, neuter alteri quidquam debet. Quæritur x numerus dierum ſtudiis impenſorum, & numerus $c-x$ dierum otii? Aequatio: $ax=bc-bx$. & $x=\frac{bc}{a+b}=18$: unde dies otii $=12$. Sequentia problemata erunt plurium incognitarum, cum in præcedentibus fuerit unica.

138. PROBLEMA XI. Libræ Caffeæ 3, cum 4 libris Sacchari emptæ ſunt crucigeris $170=a$: iterum libræ Caffeæ 5, cum 2 libris Sacchari crucigeris $190=b$. Quæritur x pretium unius libræ Caffeæ; & y pretium libræ Sacchari? Erunt duæ æquationes: $3x+4y=a$; altera, $5x+2y=b$. Ex prima æquatione habetur $y=\frac{a-3x}{4}$ quo valore de y in altera æquatione ſubſtituto erit $5x+\frac{2a-6x}{4}=b$. Unde $x=\frac{2b-a}{7}=30$ & $y=20$.

139. PROBLEMA XII. Mater de ætate trium filiorum rogata reſpondet: primi ætas $=x$ cum ætate ſecundi $=y$ facit annos $24=a$: primi vero ætas cum ætate tertii $=z$, facit annos $22=b$: tertii demum ætas cum ætate ſecundi dat annos $18=c$. Quæruntur x, y, z. Erunt tres æquationes: $x+y=a$: deinde $x+z=b$: demum $y+z=c$. Ex ultima habetur $z=c-y$; quo valore de z ſubſtituto in ſecunda æquatione habetur $y=c-b+x$: hoc denique valore de y ſubſtituto in prima æquatione erit $x=\frac{a+b-c}{2}$. Eritque $x=14$: $y=10$: $z=8$.

140. PROBLEMA XIII: Invenire duos numeros x & y tales, ut ſi ablata ex y pars a adjiciatur alteri x, hic ſit duplus prioris reſidui: quodſi ablata de x pars a addatur alteri y; ſint jam duo Numeri æquales. Erit: $x+a=2(y-a)$ & $x-a=y+a$. Ex prima æquatione eſt $y=\frac{x+3a}{2}$: per ſubſtitutionem in altera erit $x=7a$. Sit $a=1$; erit $x=7$, $y=5$ &c.

141. PROBLEMA XIV. Dentur duæ hæ æquationes: $x^3=\frac{x}{y}$ & $x^2y^3=\frac{y}{a^2}$. Erit, ſicut quævis æquatio, problema, quod ſic proferes: invenire duos numeros; primi cubus ſit quotus ex diviſione primi per ſecundum: factum vero ex quadrato primi in cubum ſecundi ſit quotus ortus ex diviſione ſecundi per quadratum cujuscunque numeri. Invenies autem breviſſimo calculo, quod per arithmeticam vulgarem fruſtra quæſiveris: $x=a$; $y=\frac{1}{a^2}$.

142. PROBLEMA XV. Invenire quatuor numeros, quorum conditiones totidem æquationibus ſint expreſſæ: $x+y=a$, $x+v=b$, $y+z=c$, $z+v=d$. Solvi hoc non poterit, ut experiri licet. Generaliter ſi ſint plures quam duo, numeri incogniti numero pares, ita ut binorum quorumque ſola ſumma, aut ſola differentia ſit data, ſolvi problema nequit. At ſi in una æquatione detur duorum differentia, jam ſolvi poteſt. E. g. $x+y=a$, $y-z=b$, $z+v=c$, $x+v=d$. Hæc & plura docebit uſus. Præcedentia problemata fuere determinata; ſequuntur quædam indeterminata.

143. PROBLEMA XVI. ſint duo numeri x & y inveniendi, quorum ſumma data ſit $=a$. Erit unica æquatio: $x+y=a$; inde $x=a-y$. Cum ſit problema indeterminatum; debet y determinari, ſeu aſſumi aptus numerus, ne ſcilicet x fiat quantitas negativa. Sit E. g. $a=10$; poterit pro y ſumi numerus integer quivis ab 1 ad 9; & quævis fractio, quæ ſit minor, quam 9; cum ergo fractiones minores poſſint eſſe infinitæ; etiam numerus ſolutionum eſt infinitus.

144. PROBLEMA XVII. Sunt tria vini genera miſcenda: primi menſura venit crucigeris $30=a$; ſecundi

$20=b$; tertii $15=c$, mifti menſura debet eſſe crucigerorum $24=d$. Quæruntur quantitates trium veni generum $x:y$, z. Habentur tantum duæ æquationes: $x+y+z=1$ menſuræ; & $ax+by+cz=d$. Itaque z per ſubſtitutionem eliminata, pervenietur ad ultimam æquationem: $x=\frac{d-c}{a-c}+\frac{c-b}{a-c}\times y$. Ergo y debet determinari, &, ut patet, per numerum unitate minorem. Fiat E. g. $y=\frac{1}{3}$; erit $x=\frac{4}{15}$, $z=\frac{3}{5}$. Si fiat $y=\frac{1}{2}$, erit $x=\frac{1}{10}$, $z=\frac{2}{5}$ &c.

145. PROBLEMA XVIII. Invenire numerum x; qui ductus in a det perfectum quadratum, uti etiam ductus in b. Erit $ax=y^2$; $bx=z^2$. Unde $x=\frac{y^2}{a}=\frac{z^2}{b}$, Hinc $y^2=\frac{az^2}{b}$; & $y=\sqrt{\frac{az^2}{b}}=z\sqrt{\frac{a}{b}}$ (18). Determinato z habetur & y & x. Patet autem, ut ſolutio in numeris poſſit haberi, debere $\frac{a}{b}$ eſſe perfectum quadratum, ſi E. g. ſit $a=12$, $b=3$ &c. Præcedentia problemata fuere omnia primi gradus; ſequens eſt ſecundi.

146. PROBLEMA XIX. Sit æquatio problematis $a+x=x^2$. Erit $a=x^2-x$; & complendo quadratum, erit $a+\frac{1}{4}=x^2-x+\frac{1}{4}$. Unde $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{(a+\frac{1}{4})}$. Ubi a debet eſſe numerus, qui cum $\frac{1}{4}$ faciat quadratum perfectum E. g. fiat $a=20$, erit $x=5$. Si detur hæc æquatio: $x^2+xy=a$; cum ſint duæ incognitæ, erit problema ſecundi gradus indeterminatum, & pervenietur ad hanc æquationem: $x=\sqrt{(\frac{y^2}{2}+a)}-\frac{y}{2}$. Si quantitas determinanda y fiat $=6$, $a=16$, erit $x=2$, &c.

147. PROBLEMA XX. Invenire numeros x & y, ſi dentur bina ex his ſex: ſumma $x+y=s$: differentia $x-y=d$: factum $xy=f$: quotus $\frac{x}{y}=q$: ſumma quadratorum $x^2+y^2=S$: differentia quadratorum $x^2-y^2=D$. Sunt hujus problematis determinati caſus omnino quindecim, inter quos varii ſunt ſecundi gradus, ceteri ſunt gradus primi. Præcipui uſus eſt hic caſus: data ſumma & differen-

ferentia invenire ipſos numeros. Erit $x+y=s$, $x-y=d$, cujus ſolutio jam ſupra in Regula X (127) allata hæc eſt: $x=\frac{s+d}{2}$; $y=\frac{s-d}{2}$; quæ formulæ totidem theoremata continent; prima quidem hoc: *ſemiſumma plus ſemidifferentia dat partem majorem*; altera iſtud: *ſemiſumma minus ſemidifferentia dat partem minorem.*

CAPUT VI.

Ratio & Proportio.

ARTICULUS I.

Ratio & proportio arithmetica.

148. DEFINITIO 1. *Ratio arithmetica* eſt comparatio duarum quantitatum, conſiderando earum *differentiam*, quæ differentia *exponens rationis* dicitur. Igitur in omni ratione duo ſunt termini, primus *antecedens*, alter *conſequens* rationis vocatur. Ratio autem ita exprimitur $a:b$. 3:5. in qua differentia, ſeu exponens eſt 2, uti & in hac 5:3.

149. COROLLARIUM. Si differentia nominetur d, antecedens a, conſequens b; & ſi fuerit $a>b$, patet fore $b=a-d$; ſi vero ſit $a<b$; fore $b=a+b$. Unde quævis ratio arithmetica exprimi poterit generali formula $a:a\pm d$, in qua $+$ valet, ſi fuerit $a<b$; & $-$, ſi fuerit $a>b$.

150. DEFINITIO 2. *Proportio arithmetica* eſt æqualitas duarum rationum; ſive quarum eadem eſt differentia & exponens; ita autem exprimitur, $3:5=7:9$ & $5:8=7:10$; generatim $a:b=c:f$. Quodſi terminus ſecundus a tertio fuerit diverſus, erit *proportio diſcreta*, eruntque *termini quatuor proportionales*: Si terminus ſecundus cum tertio idem fuerit, E. g. $a:b=b:c$, erit *proportio continua*, & *tres termini continue proportionales*, & ita ſcribi ſolent $\div a:b:c$.

151.

151. COROLLARIUM. Quævis proportio arithmetica hac formula generali poterit exhiberi: $a:a\pm d=b:b\pm d$. Sequitur ex dictis de ratione (149). Et continua: $a:a\pm d=a\pm d:a\pm 2d$.

152. THEOREMA. *Summa terminorum extremorum æquatur in proportione discreta summæ mediorum: in continua duplo termini medii.*

DEMONSTRATIO manifesta est ex ipsis formulis generalibus (151).

153. PROBLEMA. *Datis tribus terminis, a, b, c, invenire quartum arithmetice proportionalem x.*

RESOLUTIO. Erit $a;b=b:x$; unde (152) $a+x=b+c$, & $x=b+c-a$; quæ erit formula generalis pro quovis quarto arithmetice proportionali inveniendo.

DEMONSTRATIO hujus & sequentium problematum patet ex citato Theoremate (152).

154. PROBLEMA. *Datis duobus terminis, a, b, invenire tertium x continue proportionalem.*

RESOLUTIO. Erit $a;b=b:x$; Unde $a+x=2b$; & $x=2b-a$, quæ ex formula generalis pro tertio continue arithmetice proportionali.

155. PROBLEMA. *Datis duobus terminis, a, b, invenire medium x proportionalem.*

RESOLUTIO. Erit $a:x=x:b$; unde $a+b=2x$, & $x=\frac{a+b}{2}$; quæ est formula generalis pro quovis medio arithmetice proportionali.

156. COROLLARIUM. In ratione, & proportione arithmetica tam zerus, quam terminus negativus habere locum potest. E. g. $5:0=8:3$. Item $\div\ 0:5:10$, Item $6:3=2:-1$; & $\div\ 3:0:-3$. & $\div\ -3:8:19$.

ARTI-

ARTICULUS II.

Ratio & proportio Geometrica.

157. DEFINITIO 1. *Ratio geometrica* eſt comparatio duarum quantitatum, conſiderando, quomodo prima, *antecedens*, contineatur in ſecunda, *conſequente*. Quotus ex diviſione conſequentis per antecedentem eſt *exponens rationis*. Exprimitur autem etiam ratio geometrica per $a:b$, cujus proin exponens erit $\frac{a}{b}$. Ita in ratione 4:12 exponens eſt 3; in ratione 12:4 exponens eſt $\frac{12}{4}=\frac{3}{1}$. Nempe exponens eſt major unitate, quando antecedens eſt minor conſequente, quæ *ratio minoris inæqualitatis* dicitur: in *ratione majoris inæqualitatis*, cujus ſcilicet antecedens major eſt conſequente, exponens eſt fractio propria, adeoque minor unitate. Exigui uſus eſt *ratio æqualitatis*, in qua antecedens æquatur conſequenti E. g. $a:a$, 5:5 &c. cujus proin exponens eſt unitas. Demum *rationes æquales* ſunt, quarum idem eſt exponens E. g. 3:9 & 5:15 & 1:3, cum ſit $\frac{9}{3}=\frac{15}{5}=\frac{3}{1}=3$. Ita æquales ſunt 9:3, 15:5, 3:1, quippe eſt $\frac{3}{9}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ &c.

158. COROLLARIUM. Si a vocetur antecedens, b conſequens, q exponens rationis; erit in omni ratione $a:b$, $\frac{b}{a}=q$; inde $b=aq$. Unde quævis ratio geometrica exprimi poteſt hac formula generali $a:aq$.

159. DEFINITIO 2. *Ratio compoſita* ex aliis rationibus eſt, cujus exponens eſt factum exponentium omnium illarum rationum. Erit ergo ratio ex aliis compoſita, ſi aliarum antecedentes inter ſe, ut & conſequentes inter ſeſe multiplicentur; & fiat ex his factis ratio. E. g. ſint tres rationes $a:b$, $c:d$, $f:g$, erit ratio ex his compoſita $acf:bdg$; hujus enim exponens erit $\frac{bdg}{acf}=\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}\times\frac{g}{f}$, id eſt factum omnium exponentium illarum rationum.

160. DEFINITIO 3. Ratio compoſita ex rationibus æqualibus dicitur unius ex iis *multiplicata*. Et quidem compoſita ex duabus æqualibus, *duplicata*, ex tribus *tripli-*

triplicata, ex quatuor *quadruplicata* &c. E. g. ſint duæ rationes æquales $a:b$, $c:d$, erit duplicata $ac:bd$. Ita ſi tres ſint æquales $a:b$, $c:d$, $f:g$, erit triplicata $acf:bdg$ &c. Cum vero in ratione duplicata ſit $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, poterit ratio illa duplicata $ac:bd$, mutari in has $a^2:b^2$ vel $c^2:d^2$; nam omnium harum exponens eſt æqualis, cum ſit $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\times\frac{d}{c}$ ſive $\frac{bd}{ac}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{d^2}{c^2}$. Ita in ſuperiore triplicata cum ſit $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{g}{f}$ erit $acf:bdg$ æqualis rationi $a^3:b^3$, æqualis $c^3:d^3$ æqualis $f^3:g^3$, erit enim idem exponens $\frac{bdg}{acf}=\frac{b^3}{a^3}=\frac{d^3}{c^3}=\frac{g^3}{f^3}$ &c. Unde ratio duplicata eſt ratio quadratorum, triplicata cuborum &c. Liquet item exponentem rationis duplicatæ eſſe quadratum, triplicatæ cubum &c. de exponente rationis ſimplicis.

161. DEFINITIO 4. *Proportio geometrica* eſt æqualitas duarum rationum, quæ ſic exprimitur $a:b=c:d$, & hoc modo enuntiatur: a eſt vel habet ſe ad b, ſicut c ad d. Alia *diſcreta*, alia *continua*, ut ſupra (150). Continua geometrica ſolet ita exhiberi $\dot{\cdot}\dot{\cdot}\ a:b:c$.

162. COROLLARIUM 1. Sunt ergo ſimpla, uti eorum æque multipla; ſive $a:b=am:bm$. Item tota ſunt, uti eorum *partes ſimiles*, quæ oriuntur, ſi tota dividantur per eundem numerum; ſive erit $a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$, eſt quippe propter exponentem æqualem utraque proportio vera. Porro cum *pars aliquota* alicujus totius ſit, quæ metitur ſuum totum; *pars aliquanta*, quæ non metitur ſuum totum; patet, quænam ſint partes ſimiles aliquotæ, quænam aliquantæ: E. g. 3. & 4. ſunt partes aliquotæ ſimiles totorum 15 & 20; partes vero ſimiles aliquantæ ſunt $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ totorum 2 & 3 &c.

163. COROLLARIUM 2. Reducetur ergo proportio, & ratio quævis ad minores terminos, ſi rationis termini dividantur per communem menſuram; quæ ſi fuerit maxima, ratio erit reducta ad minimos terminos E. g. $amc:bmc=a:b$. $12:36=1:3$ &c.

164.

164. COROLLARIUM 3. Quævis proportio geometrica exhibebitur hac formula generali, in qua q eſt exponens rationis: $a:aq=b:bq$.

165. DEFINITIO 5. Termini proportionis dicuntur eſſe in *ratione directa*, Quodſi primus terminus fuerit ad ſecundum, ſicut quartus ad tertium, erunt termini in ratione *reciproca* vel *inverſa*. E. g. $a:aq=bq:b$. Unde rationes hæ reciprocæ facile mutantur in directas, ſi alterius rationis termini transponantur, fiatque $a:aq=b:bq$ vel $aq:a=bq:b$, utraque enim proportio eſt vera, cum in prima idem ſit exponens q, in altera $\frac{1}{q}$. Idem obtinebitur, ſi retento terminorm ordine, unius rationis termini fiant denominatores fractionum, quarum numerator ſit utrinque unitas. E. g. $a:aq=\frac{1}{bq}:\frac{1}{b}$, erit enim idem exponens q.

166. COROLLARIUM. 1. Duæ igitur fractiones ejusdem numeratoris erunt in ratione reciproca ſuorum denominatorum, ſive erunt hi termini in ratione reciproca $\frac{a}{b}:\frac{a}{c}=b:c$; eſt enim vera proportio directa $\frac{a}{b}:\frac{a}{c}=c:b$, cum utriusque rationis idem ſit exponens $\frac{b}{c}$. At fractiones duæ cognomines ſunt in ratione directa numeratorum. E. g. $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=a:b$ (162). Eſt denique quævis fractio ad unitatem, uti numerator ad denominatorem E. g. $\frac{a}{b}:1=a:b$, ubi exponens eſt $\frac{b}{a}$. Quando occurrit proportio hujus formæ $a:b=\frac{1}{m}:\frac{1}{n}$, dicuntur eſſe in ratione reciproca $a:b$, $m:n$.

167. COROLLARIUM 2. Ex dictis colligitur, rationem eſſe diviſionem, & viciſſim. Colligitur etiam quamvis rationem exhiberi per quotum ex diviſione conſequentis per antecedentem. Demum omnem fractionem continere rationem &c.

168. THEO-

168. THEOREMA. *Proportionis geometricæ terminos licet, ſalva proportione, varie permutare; prout ſequens ſchema exhibet.*

$a : aq = b : bq$

	Permutationes	Exponens
I. Invertendo	$aq : a = bq : b$	$\frac{1}{q}$
II. Alternando	$a : b = aq : bq$	$\frac{b}{a}$
III. Componendo	$a+aq : aq = b+bq : bq$	$\frac{q}{1+q}$
vel - - -	$a+aq : a = b+bq : b$	$\frac{q}{1+q}$
IV. Subtrahendo	$a-aq : aq = b-bq : bq$	$\frac{q}{1-q}$
vel	$a-aq : a = b-bq : b$	$\frac{1}{1-q}$
V. Convertendo	$a : a+aq = b : b+bq$	$1+q$
vel	$a : a-aq = b : b-bq$	$1-q$

DEMONSTRATIO. Manet ſemper idem utriusque rationis exponens, in ipſo ſchemate exhibitus.

169. THEOREMA. *In omni proportione geometrica factum extremorum terminorum æquatur facto mediorum.*

DEMONSTRATIO. Patet in formula generali proportionis diſcretæ: $a : aq = b : bq$; & continuæ $a : aq = aq : aq^2$; in qua factum extremorum æquatur quadrato medii.

170. PROBLEMA. *Datis tribus terminis a, b, c, invenire quartum proportionalem x.*

RESOLUTIO. Erit $a:b=c:x$; & (169) $ax=bc$; demum $x=\frac{bc}{a}$; quæ eſt formula generalis pro quarto proportionali inveniendo, contenta celebri illo *regulæ aureæ* verſiculo: *duc ternum in medium: productum divide primo.* De regula hac aurea pluribus aget articulus ſequens.

171. PROBLEMA. *Datis duobus terminis a, b, invenire tertium continue proportionalem x.*

RESOLUTIO. Erit $a:b=b:x$, & $ax=b^2$; *unde* $x=\frac{b^2}{a}$; quæ eſt formula generalis pro tertio continue proportionali.

172. PROBLEMA. *Datis duobus terminis a, b, invenire medium proportionalem x.*

RESOLUTIO. Erit $a:x=x:b$; & $x^2=ab$; unde $x=\sqrt{ab}$; quæ eſt formula generalis pro inveniendo medio proportionali. Quodſi ergo ab non fuerit perfectum quadratum, adcuratus medius proportionalis in numeris haberi nequit. E. g. ſi fuerit $a=12$, $b=2$, erit $ab=24$; cujus radix adcurata non eſt; invenitur tamen veræ ſemper propior (112) erit enim $\sqrt{24}=4{:}898979$ &c.; quæ proxime eſt $=5$.

173. THEOREMA. *Si quatuor termini ita fuerint poſiti: a, b, c, d, ut factum extremorum ad æquetur facto mediorum bc; erunt ii termini proportionales, ſeu erit* $a:b=c:d$.

DEMONSTRATUR. Exponentes harum rationum $a:b$, $c:d$ ſunt $\frac{b}{a}$ & $\frac{d}{c}$; cum vero ſit $ad=bc$, erit etiam $\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ac}$ id eſt $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$; cum ergo exponentes ſint æquales, erunt & rationes æquales, & $a:b=c:d$.

174. COROLLARIUM 1. Si igitur duo facta ad, bc æquentur, erunt eorum factores reciproce proportionales, ſeu $a:b=c:d$. Quævis ergo æquatio reſolvitur in proportionem E. g. $ab=x^2$, erit $a:x=x:b$. Ita ex $ab=x$ fiet $x:a=b:1$. Ex $a^2-x^2=bc$ fiet $a+x:b=c:a-x$.

Demum

Demum ſit $\frac{ab}{c}=dx$, erit $ab=cdx$; inde $a:c=dx:b$ vel $a:cd=x:b$, vel $a:cx=d:b$ &c.

175. COROLLARIUM 2. Si factum ſit $=f$, factores $=M$ & m; cum ſit $f=Mm$; erit $f:M=m:1$; id eſt: in multiplicatione eſt factum ad unum factorem, ſicut alter factor ad unitatem. Eodem modo ſi dicatur dividendus $=D$ diviſor $=d$, quotus $=q$; cum ſit $\frac{D}{d}=q$, & $D=dq$; erit $D:d=q:1$, ſeu in diviſione eſt dividendus ad diviſorem, ſicut quotus ad unitatem.

176. COROLLARIUM 3. Duarum igitur fractionum æqualium numeratores ſunt, uti denominatores. Sit enim $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, erit etiam reductione ad eundem denominatorem facta $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ & $ad=bc$; inde $a:c=b:d$; vel etiam $b:a=d:c$ (168). Ex hoc fluit promiſſum ſupra (76)

177. PROBLEMA. *Reducere fractionem datam* $\frac{a}{b}$ *ad æqualem dati nominis* d.

RESOLUTIO. Ex conditione debet fieri $\frac{a}{b}=\frac{x}{d}$: ergo x inveniendus numerator eſt; fiat ergo $b:a=d:x$ (176) erit $x=\frac{ad}{b}$, & $\frac{x}{d}=\frac{ad:b}{d}=\frac{a}{b}$. In numeris E. g. quæritur quot crucigeri ſint $\frac{3}{4}$ unius floreni? Cum crucigeri ſint partes ſexageſimæ floreni, debet fieri $\frac{3}{4}=\frac{x}{60}$; fiat ergo $4:3=60:x$: erit $x=45$; unde $\frac{3}{4}=\frac{45}{60}=45$ crucigeris. Ita ſi dividantur 67 floreni inter 7, quotus erit $=9\frac{4}{7}$; at quot crucigeri erunt $\frac{4}{7}$ floreni? debebit eſſe $\frac{4}{7}=\frac{x}{60}$; fiat $7:4=60:x$; invenietur $x=34\frac{2}{7}$, unde $\frac{4}{7}=\frac{34\frac{2}{7}}{60}$ id eſt: 34 crucigeri, & $\frac{2}{7}$ unius crucigeri. Quot ergo obolos dabunt $\frac{2}{7}$ unius crucigeri? Cum cruciger ſit $=4$ obolis, erit $\frac{2}{7}=\frac{x}{4}$; fiat $7:2=4:x$, erit $x=1\frac{1}{7}$ id eſt $\frac{2}{7}$ crucigeri faciunt unum

obolum & unam partem ſeptimam unius oboli; quæ pars nullius cum ſit momenti, in vita civili ſolet in calculo ferme omitti; erit itaque quotus ex diviſione 67 florenorum per $7=9$ florenis, 34 crugeris, uni obolo &c.

178. THEOREMA. *In problematis algebraicis conditio involvens proportionem haberi poteſt pro æquatione.*

DEMONSTRATIO evidens eſt, cum ex quavis proportione habeatur æquatio facti extremorum & mediorum. Unde ſolvitur E. g. hoc problema: ſint duo numeri inveniendi x & y, quorum ſumma ſit data $=s$; ſit autem $x:y=a:b$. Habebuntur duæ æquationes $x+y=s$ & $bx=ay$; unde problema eſt determinatum. Ita & ſequens: invenire tres numeros $x+y+z$ tales, ut ſit $x:y=a:b$, $y:z=c:d$, & $x+y+z=s$, eſt determinatum, cum habeantur tres æquationes &c eritque $x=\frac{acs}{ac+bc+bd}$.

179. THEOREMA. *Si duæ proportiones componantur, aut per ſe dividantur, erunt facta & quoti proportionales.*

DEMONSTRATIO. Sint tres proportiones: $a:am=b:bm$, $c:cn=d:dn$, $f:fq=g:gq$: erit compoſita ex his $acf:acfmnq=bdg:bdgmnq$, ubi idem eſt exponens mnq. Ita ſi prima proportio dividatur per ſecundam, habebitur $\frac{a}{e}:\frac{am}{cn}=\frac{b}{d}:\frac{bm}{dn}$, ubi æqualis iterum eſt exponens $\frac{m}{n}$.

180. COROLLARIUM 1. Radicum proportionalium potentiæ ejusdem gradus ſunt proportionales. Sint enim quæcunque radices proportionales $a:b=c:d$, hæc proportio compoſita per ſeipſam dabit $a^2:b^2=c^2:d^2$; ita eadem ter ſumpta compoſita dabit proportionem cuborum $a^3:b^3=c^3:d^3$; & ſic deinceps.

181. COROLLARIUM. 2. Viciſſim potentiarum proportionalium radices ejusdem gradus ſunt proportionales. Sint enim generaliter, potentiæ $a^m:b^m=c^m:d^m$; erit $a^m d^m=b^m c^m$; ergo & $\sqrt[n]{a^m d^m}=\sqrt[n]{b^m c^m}$; ſive (95) $a^{\frac{m}{n}} d^{\frac{m}{n}}=b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}}$, unde (172) $a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}=c^{\frac{m}{n}}:d^{\frac{m}{n}}$, id eſt (95) $\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{c^m}:\sqrt[n]{d^m}$.

182. THEO-

182. THEOREMA. *Si fuerint plures rationes æquales, erit ſumma vel differentia antecedentium ad ſummam vel differentiam conſequentium, ut quivis antecedens ad ſuum conſequentem.*

DEMONSTRATIO. Sint quotcunque rationes æquales $a:aq=b:bq=c:cq$ &c. erit $a+b+c:aq+bq+cq=a:aq=b:bq=c:cq$. Item erit $a-b-c:aq-bq-cq=a:aq=b:bq=c:cq$ &c. Cum omnium harum rationum exponens ſit & maneat idem q.

ARTICULUS III.

Regula aurea.

183. DEFINITIO. *Regula aurea*, ab uſu eximio ſic dicta, eſt modus inveniendi quantitatem incognitam datis proportionalem (170). *Simplex* erit, ſi datis tribus quartus terminus fuerit inveniendus: *Compoſita*, ſi e datis quinque terminis ſextus, vel e datis ſeptem octavus ſit inveniendus. Utraque eſt vel *directa*, vel *reciproca*, quæ, cum facile mutetur in directam (165) locum in ſequentibus non habebit. In quavis proportione *termini homologi* ſunt, qui ejusdem generis res ſignificant, E. g. pretia, pondera, menſuras, tempora, lucra &c.

184. PROBLEMA. *Reſolvere problemata regulæ aureæ.*

RESOLUTIO. Cum plus exercitatio, quam præcepta, hic valeat; paucæ obſerventur hæ regulæ.

Regula I. Omnis proportio inverſa mutetur in directam (165). Generaliter termini ita ponantur, ut ſi primus fuerit major ſecundo, etiam tertius major intelligatur quarto: & ſi primus ſit ſecundo minor, etiam tertius minor erit quarto.

Regula II. Termini homologi reducantur ad eandem denominationem. E. g. ſi termini homologi fuerint 3 libræ, & ſeptem unicæ; vel libræ mutentur in uncias, quarum 16 continentur in libra, vel 7 unciæ mutentur in partes libræ: eruntque jam iidem termini vel 48 unciæ, & 7 unciæ; vel 3 libræ, & $\frac{7}{16}$ libræ.

Regula III. Si occurrat terminus miſtus ex integro & fracto, mutetur in unam fractionem ſpuriam (68) E. g. $2\frac{3}{4}$ floreni, fiet $\frac{11}{4}$. Integri vero, uti & fracti maneant; nec enim, quod alii volunt, neceſſe eſt terminos homologos eſſe vel ambos integros, vel fractiones ejusdem nominis.

Regula IV. Compendium laboris erit, ſi termini proportionis fuerint, quantum fieri poteſt, minimi. Igitur prima ratio ſemper reducatur ad minimos terminos. Dein videatur, an non ulteriori reductioni locus ſit, ſi tertius terminus ſecundo loco fuerit poſitus, quod licet (168). E. g. ſit proportio data: $6:27=18:x$: fiet $2:9=18:x$ & alternando $2:18=9:x$ & $1:9=9:x$; unde jam ſola multiplicatione mediorum fiet $x=81$. Reductiones hæ licet videantur ambages; exercitato tamen facillimæ erunt.

Regula V. Si fuerint dati termini quinque, vel ſeptem; inſtituantur duæ vel tres proportiones, quæ dein componantur. At hæc planiora erunt per ſequentia problemata. Quid obſervandum in regula ſocietatis compoſita, docebit Problema VI. (190).

185. PROBLEMA I. Vini vaſa 80, conſtant aureis 500: quæritur vaſis 1 pretium x? Erit $80:500=1:x$, & (Regula III.) $4:25=1:x$: ergo $x=6\frac{1}{4}$ aureis.

186. PROBLEMA II. Unciæ 6 mercis cujusdam conſtant florenis 3: quanti conſtant libræ 5? Erit $6:3=80:x$ vel $2:1=80:x$: vel $2:80=1:x$, id eſt $1:40=1:x$, unde jam habetur $x=40$. Poterat etiam (Regula II.) poni: $\frac{6}{16}:3=5:x$ & multiplicando terminos primæ rationis per 16, $6:48=5:x$, ſeu $1:8=5:x$, unde ſola multiplicatione fit $x=40$.

187. PROBLEMA III. Tres mercatores compoſuerunt ſummam aureorum 1400; primus contulit aureos 300, alter 400, tertius 700; lucrati hac ſumma fuere aureos 126, quæritur lucrum ſingulorum x, y, z. Erit

$$1400:126=\begin{matrix}[300:x\\[400:y\\[700:z\end{matrix}$$ vel diviſa prima ratione per 14 (56)

$$\text{erit } 100:9=\begin{matrix}[300:x\\[400:y\\[700:z\end{matrix}$$ vel (Regula IV.) $100:\begin{matrix}[300\\[400\\[700\end{matrix}=9:\begin{matrix}[x\\[y.\\[z\end{matrix}$

vel

vel $1 : \begin{bmatrix}3\\4\\7\end{bmatrix} = 9 : \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ unde ſola multiplicatione fit $x = 27$: $y = 36 : z = 63$. Porro in hoc problemate eſt *regula ſimplex ſocietatis*, qua dividitur commune lucrum vel damnum in partes collatis pecuniis proportionales.

188. PROBLEMA IV. Mercis cujusdam $\frac{3}{4}$ libræ conſtant $\frac{3}{5}$ floreni; quanti conſtabunt $\frac{4}{7}$ libræ? erit $\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = \frac{4}{7} : x$. Unde $x = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}$ floreni $= 27$ crucigeris $+ 1\frac{5}{7}$ oboli (177).

189. PROBLEMA V. Operarii 90 abſolvunt opus intra menſes 8; quot operarii abſolvent idem intra menſes 12? Examinanti patet, pauciores requiri operarios, quam 90; unde ſic ponantur termini: $12 : 8 = 90 : x$ vel $3 : 2 = 90 : x$, & $3 : 90 = 2 : r$, & $1 : 30 = 2 : x$, unde $x = 60$. Problema alias ſolvendum erat per regulam inverſam, quæ hic mutata eſt in directam; ſequuntur problemata regulæ aureæ compoſitæ.

190. PROBLEMA VI. Tres mercatores contulerunt ſummam 10000 aureorum: primus contulit 2000 per ſex annos: alter 3000 per quatuor annos: tertius 5000 per duos annos. Lucrati autem fuere 4500 aureos: quæritur cujusvis lucrum? In hiſce problematis *regulæ ſocietatis compoſitæ* ita ratiocinari oportet: qui per 6 annos confert 2000 aureos, idem lucrabitur, ac ſi per annum unum contuliſſet ſexies $2000 = 12000$: & qui per quatuor annos confert 3000, idem lucratur, ac ſi per unum annum contuliſſet $4 \times 3000 = 12000$: ita tertius idem lucratur, ac ſi contuliſſet $2 \times 5000 = 10000$: unde erit jam proportio iſthæc:

$$34000 : 4500 = \begin{bmatrix}12000 : x\\12000 : y\\10000 : z\end{bmatrix}$$ vel reductis omnibus: $17 : 4500$

$$= \begin{bmatrix}6 : x = 1588\frac{4}{17}\\6 : y = 1588\frac{4}{17}\\5 : z = 1323\frac{9}{17}\end{bmatrix}$$ cur primus terminus ſit 34000, patet ex dictis.

191. PROBLEMA VII. In arce obſeſſa militibus 300 ſuperſunt libræ carnis 3600, quæ iis ſufficiunt pro 12 diebus. Accedunt alii 600, afferuntque libras carnis 14400; quamdiu hæc omnis annona omnibus ſufficiet?

Hoc ergo erit problema: militibus 300, pro diebus 12, ſufficiunt libræ 3600: militibus 900, quot diebus ſufficient libræ 18000? Fiat prima proportio: $900 : 12 = 300 : y$, ubi y erunt dies, quibus libræ 3600 ſufficient militibus 900. Fiat dein $3600 : 18000 = y : x$, ubi x erunt dies quæſiti quibus 18000 libræ ſufficiunt militibus 900. Unde erit $\left\{\begin{matrix} 900 : 300 = 12 : y \\ 3600 : 18000 = y : x \end{matrix}\right\}$ vel $\left\{\begin{matrix} 3 : 1 = 12 : y \\ 1 : 5 = y : x \end{matrix}\right\}$ vel $\left\{\begin{matrix} 3 : 12 = 1 : y \\ 1 : 5 = y : x \end{matrix}\right\}$ vel $\left\{\begin{matrix} 1 : 4 = 1 : y \\ 1 : 5 = y : x \end{matrix}\right\}$. Compoſitis jam his rationibus erit $1 : 20 = y : xy$, & diviſa ultima ratione per y erit demum $1 : 20 = 1 : x$; ubi jam dies x inventi ſunt $= 20$. Patet iterum, in prima proportione futuros fuiſſe terminos in ratione reciproca, quæ mutata eſt in directam.

192. PROBLEMA VIII. Scribæ 25, indies ſcribendo horis 9, conſcribunt libros chartæ 36; intra dies 8: Igitur ſcribæ 15, laborando indies horis 8, quot diebus conſcribent libros chartæ $28\frac{4}{5} = {}^{144}/_{5}$? Erunt tres proportiones: $\left\{\begin{matrix} 15 : 25 = 8 : z \\ 8 : 9 = z : y \\ 36 : {}^{144}/_{5} = y : x \end{matrix}\right\}$ & reductæ $\left\{\begin{matrix} 3 : 5 = 8 : z \\ 8 : 9 = z : y \\ 5 : 4 = y : x \end{matrix}\right\}$ Erit compoſita ex his: $120 : 180 = 8yz : yzx$. Reducta prima ratione ad minimos terminos, & ultima per yz diviſa; erit $2 : 3 = 8 : x$; vel $2 : 8 = 3 : x$ demum $1 : 4 = 3 : x$; unde $x = 12$. Hujusmodi problemata ſeptem terminorum rariora ſunt.

CAPUT VII.

Progreſſiones.

ARTICULUS I.

Progreſſio arithmetica.

193. DEFINITIO. *Progreſſio arithmetica* eſt ſeries plurium terminorum in proportione arithmetica continua; unde etiam, ut illa, exprimitur $\div a : b : c : f : g : h$ &c. *Aſcendens* ſeu *creſcens*, ſeu *divergens* erit,

erit, ſi conſequentes fuerint ſuis antecedentibus majores E. g. ÷ 2:5:8:11:14:17 &c. alias vocatur *deſcendens*, *decreſcens*, *convergens* E. g. ÷ 18:14:10:6:2:—2: &c.

194. COROLLARIUM 1. Ex dictis de proportione continua arithmetica (151) ſequitur, progreſſionem quamvis rite exprimi communi hac formula, in qua a eſt primus terminus, d conſtans differentia: ÷ $a : a \pm d : a \pm 2d : a \pm 3d : a \pm 4d$ &c.

195. COROLLARIUM 2. Ex conſideratione formulæ præcedentis generalis liquet, haberi ultimum terminum, ſi primo toties addatur differentia $\pm d$, quot ſunt termini, uno dempto. Unde ſi vocetur numerus omnium terminorum $= n$, ultimus terminus $= z$, erit $z = a \pm d(n-1)$ Id eſt, erit $z = a \pm dn \mp d$; quæ eſt formula generalis termini ultimi cujusvis progreſſionis arithmeticæ, in qua ſuperius ſignum eſt pro aſcendente, inferius pro deſcendente.

196. THEOREMA. *In omni progreſſione arithmetica ſumma extremorum terminorum æquatur ſummæ duorum æqualiter utrinque ab extremis diſtantium: & ſi numerus terminorum fuerit impar, duplo termini medii.*

DEMONSTRATIO manifeſta eſt in adjectis ſchematis formulæ generalis:

÷ $a : a \pm d : a \pm 2d : a \pm 3d : a \pm 4d : a \pm 5d$

÷ $a : a \pm d : a \pm 2d : a \pm 3d \; a \pm 4d.$

197. THEOREMA. *In quavis progreſſione arithmetica ſumma omnium terminorum æquatur facto ex ſumma extremorum in numerum terminorum dimidio.*

DEMONSTRATIO. Si factum extremorum ducatur in numerum terminorum, accipiuntur bis omnes ſummæ duorum terminorum æqualiter ab extremis diſtantium, ut patet in ſchematis mox poſitis; id eſt tota terminorum ſumma bis accipitur: ergo dimidium hoc factum æquatur ſummæ.

198. COROLLARIUM. Si ergo ſumma omnium terminorum dicatur $= s$, habetur hujus ſummæ formula generalis $s = \frac{(a+z)n}{2}$ ſive $s = \frac{an+zn}{2}$.

199. PROBLEMA. *Datis tribus ex his quinque: a, d, z, n, s, invenire reliqua.*

RESOLUTIO. Habeantur præ oculis duæ formulæ ſupra (195 & 198) inventæ: I $z = a \pm dn \mp d$. & $s = \frac{an+zn}{2}$. Ex his facile reſolventur omnes decem problematis caſus. Nempe datis *1mo* a, d, z: habetur n ex I, s ex II. *2do* a, d, n: habetur z ex I, s ex II. *3tio* a, d, s: invenitur z ex I & II, inde n. *4to* a, z, n: invenietur d ex I, s ex II. *5to* a, z, s: reperitur n ex II, d ex I. *6to* a, n, s: habetur z ex II, dein d ex I. *7mo* d, z, n: habetur a ex I, s ex II. *8vo* d, z, s: erit a ex I & II, inde n. *9no* d, n, s; quæratur z ex I & II, inde a. *10mo* z, n, s: habetur a ex II, inde d ex I. Formulæ hæ inventæ erunt generales pro utraque progreſſione arithmetica; ubi ſigna duq fuerint, ſuperius erit pro creſcente, inferius pro decreſcente.

200. PROBLEMA. *Inter datos duos terminos invenire quotvis medios proportionales.*

RESOLUTIO eſt ipſe caſus quartus prioris problematis; data enim ſunt tria hic: a, z, n, unde invento d, habentur medii quæſiti: $a \pm d : a \pm 2d$ &c.

ARTICULUS II.

Progreſſio geometrica.

201. DEFINITIO. *Progreſſio geometrica* eſt ſeries terminorum poſitorum in proportione continua geometrica, & ita ſolet exhiberi: $\div\div a : b : c : d : e$; &c.

202. COROLLARIUM 1. Si terminus primus dicatur a, exponens communis q; habebitur formula generalis pro quavis progreſſione geometrica, tam *aſcendente*, cujus conſequentes ſunt majores antecedentibus, quam *deſcendente*, ſcilicet $\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots$ &c.

203. CO-

203. COROLLARIUM 2. Si fiat ultimus terminus $= z$, numerus terminorum $= n$, erit $z = aq^{n-1}$, ut liquet ex formula generali præcedente.

204. THEOREMA. *In omni progreſſione geometrica factum extremorum æquatur facto duorum quorumvis æqualeter ab extremis diſtantium: & ſi termini ſint numero impari, quadrato etiam medii.*

DEMONSTRATIO manifeſta eſt ex adjectis ſchematis formulæ generalis:

$\div\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5$ & $\div\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$.

205. COROLLARIUM 1. Quivis igitur terminus in ſeipſum ductus, & per primum diviſus dabit terminum a ſe diſtantem tantum, quantum ipſe diſtat a primo. E. g. fiat $\frac{aq^2 \times aq^2}{a} = aq^4$; cum aq^2 ſit terminus tertius, qui duobus diſtat a primo, erit aq^4 quintus, diſtans etiam duobus ab aq^2. Quodſi primus terminus fuerit unitas, dlviſione opus non erit.

206. COROLLARIUM 2. Inde fluit modus inveniendi in numeris quemcunque progreſſionis terminum. E. g. in hac $\div\div$ 1:2:4:8: &c. quæritur terminus vigeſimus quintus? fiat $8 \times 8 = 64 =$ termino ſeptimo: dein $64 \times 64 = 4096 =$ termino tertio decimo: ita $4096 \times 4096 = 16777216 =$ termino quæſito vigeſimo quinto. Si terminus primus non fuerit unitas, facta illa per primum dividenda.

207. THEOREMA. *In progreſſione geometrica eſt ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium, ſicut quivis antecedens ad ſuum conſequentem.*

DEMONSTRATIO. Si in formula generali (202) inſtituatur proportio in theoremate expreſſa, erit factum extremorum æquale facto mediorum.

208. COROLLARIUM. Si ergo ſumma omnium terminorum ſit $= s$; erit ſumma antecedentium $= s - z$, & ſumma conſequentium $= s - a$; unde (207) erit $s - z : s - a = a :$

$= a : aq$; ex qua porportione facile erues $s = \frac{qz-a}{q-1}$, formulam generalem ſummæ omnium terminorum pro quavis progreſſione.

209. PROBLEMA. I. *Datis tribus ex his quatuor: a, z, q, s, invenire quartum.* II. *Datis a, q, n, invenire s.* III. *Datis a, z, invenire q.*

RESOLUTIO I. habetur ex formula $s = \frac{qz-a}{q-1}$ (208).

II. Ex formula (203) eſt $z = aq^{n-1}$: ergo invento z, habetur & $s = \frac{qz-a}{q-1}$ (208).

III. Ex formula $z = aq^{n-1}$ (203) eruitur $q = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$.

210. PROBLEMA. *Inter duos datos invenire quoteunque medios geometrice proportionales.*

RESOLUTIO. Cum dentur a, z, n, invenietur q (III. 209): eruntque medii proportionales aq, aq^2, &c. E. g. quærantur inter a & z quinque medii erit $n = 7 : q = \sqrt[6]{\frac{z}{a}}$ &c.

211. COROLLARIUM. Si ſint ſeries fractionum propriarum, quarum numerator ſit conſtans $= 1$, denominatores creſcant in progreſſione geometrica; & hæ ſeries intelligantur productæ in infinitum; erunt progreſſiones geometricæ decreſcentes, in quibus $n = \infty$, $z = \frac{1}{\infty}$, ſeu pars infinite parva unitatis, & ideo $\frac{1}{\infty} = 0$; ergo $z = \frac{1}{\infty} = 0$. Si ergo detur terminus primus a, & exponens q; habebitur ſumma omnium ſeriei cujusvis fractionum ex formula $s = \frac{qz-a}{q-1}$.

E. g. $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$. erit $s = 1$.

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$. erit $s = \frac{1}{2}$.

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$. erit $s = \frac{1}{3}$.

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{5} : \frac{1}{25} : \frac{1}{125} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$. erit $s = \frac{1}{4}$. &c.

ARTI-

ARTICULUS III.

Logarithmi.

212. DEFINITIO. *Logarithmi* ſunt numeri in progreſſione arithmetica procedentes, & reſpondentes aliis numeris in progreſſione geometrica progredientibus. E. g. in adjecto ſchemate in columna A ſunt numeri in progreſſione geometrica, cujus exponens eſt 10; quæ eadem eſt in columna B, ponendo $a = 10$. In columna C ſunt numeri in progreſſione arithmetica, reſpondentes prioribus; igitur in C ſunt priorum logarithmi, qui iidem, cum 7 zeris decimalibus, ſunt in columna D. Igitur & columna B poſſet ita poni $\therefore a^0.0000000 : a^1.0000000 : a^2.0000000$ &c.

A	B	C	D
1	a^0	0.	0.0000000
10	a^1	1.	1.0000000
100	a^2	2.	2.0000000
1000	a^3	3.	3.0000000
10000	a^4	4.	4.0000000

213. COROLLARIUM 1. Igitur logarithmi in C & D poſiti ſunt ipſi exponentes numerorum in A & B poſitorum. Et quidem ſiniſtima nota logarithmorum in D, puncto ſeparata, vocatur logarithmi *characteriſtica*, quæ ſemper unitate minor eſt numero notarum in A reſpondentium. Unde ex characteriſtica intelligitur, quot notæ ſint in numero reſpondente, & cujus valoris. Item dato numero, ſcitur logarithmi reſpondentis characteriſtica, unitate minor, numero notarum.

214. COROLLARIUM 2. Si exponentes factorum adduntur, ſumma eſt exponens facti (37) ergo etiam ſi addantur logarithmi factorum, ſumma erit logarithmus facti. Unde multiplicatio ope logarithmorum peragitur ſola additione.

215. COROLLARIUM 3. Si ab exponente dividendi tollitur exponens diviſoris, habetur exponens quoti (38): ergo ſi a logarithmo dividendi ſubtrahitur ille diviſoris, remanet logarithmus quoti. Unde diviſio per logarithmos peragitur ſubtractione.

216. COROLLARIUM 4. Exponens radicis datæ ductus in exponentem potenriæ quæſitæ, dat exponentem potentiæ quæſitæ (94): ergo & logarithmus radicis datæ ductus in exponentem potentiæ quæſitæ, dabit logarithmum

mum hujus potentiæ. Evectio igitur radicis ad quamvis potentiam habetur ope logarithmorum sola multiplicatione.

217. COROLLARIUM 5. Exponens potentiæ divisus per exponentem radicis quæsitæ dat hujus exponentem (114) ergo logarithmus potentiæ divisus per exponentem radicis dat radicis quæsitæ logarithmum. Igitur ope logarithmorum extrahitur quævis radix unica divisione. Ex quibus omnibus satis intelligitur insignis logarithmorum utilitas. Igitur habeatur *canon* seu *tabulæ logarithmorum*, vel maximæ, in quibus continentur logarithmi numerorum ab 1 ad 100000: vel saltem minores logarithmorum numerorum ab 1 ad 20000 vel ab 1 ad 10000. Quamvis autem hæ tabulæ jam constructæ sint, ingenti quidem nostro commodo; oportet tamen etiam intelligere modum, quo, improbo sane labore, confectæ fuerint; sit igitur

218. COROLLARIUM 6. Cum in superiore schemate (212) habeantur soli logarithmi paucorum numerorum 1. 10. 100. 1000. &c.; desiderabantur logarithmi omnes inter illos numeros; numerorum scilicet: 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 13 &c. &c. Exempli igitur causa paucis indicabimus, qua ratione logarithmus numeri 3. fuerit inventus. Quæratur inter a^0 & a^1, seu 1 & 10 medius geometrice proportionalis; erit is (172) $= \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5000000} = 3,1622777$, cujus proin logarithmus est exponens $= 0,5000000$; sed quærebatur logarithmus numeri $3 = 3,0000000$: ergo inter inventum justo majorem & minorem $1 = 1,0000000$ quæratur iterum medius geometrice proportionalis; id est inter $a^{0,} = a^{0,0000000}$ & $a^{0,5000000}$; erit is $= \sqrt{a^{0,5000000}} = a^{0,2500000} = \sqrt{3,1622777} = 1,7782794$; cujus proin logarithmus habetur $= 0,2500000$. Cum autem numerus hic inventus minor jam sit, quam inveniendus $3 = 3,0000000$; inter hunc minorem & ultimum majorem quæratur iterum medius, & ejus logarithmus: & ita porro inter proxime majorem & minorem, quam 3, inveniantur medii; donec demum perveniatur ad hunc $a^{0,4771213} = 3,0000000 = 3$; cujus logarithmus simul inventus erit $= 0,4771213$. Eodem modo inveniatur logarithmus numeri 2, 7, 11, 13, 17, & ferme omnium primorum. Verum jam facillime invenientur logarithmi numeri 5; & omnium compositorum. E. g. habebitur logarithmus numeri 5, si a logarithmo numeri 10 subtrahatur ille numeri 2; quod patet ex *Corolla-*

rio

tio 3 (215). Ita ex *Corollario* 2 (214) habebuntur logarithmi numerorum compoſitorum, ſi addantur logarithmi eorum factoribus reſpondentes. &c.

219. PROBLEMA: *Invenire numerum reſpondentem logarithmo, qui in tabulis adcurate non invenitur.*

RESOLUTIO: Sit datus logarithmus 2.1851003; ex eo ſubtrahatur proxime minor in tabulis = 2.1846914. Erit differentia = 4089. Notetur & differentia inter illum tabularum minorem & proxime majorem, qui eſt 2.1875207; erit hæc altera differentia = 28293. Inſtituatur nunc ſequens proportio: 28293 : 4089 = 1 : x, erit $x = \frac{1}{10} = 0.1$ vel propius = 0.14 vel = 0.144. vel = 0.1445. Cum ergo logarithmo proxime minori reſpondeat numerus 153; reſpondebit logarithmo dato numerus 153.1 vel 153.14 vel 153.144 vel 153.1445, cui ne pars unitatis integræ decies milleſima deeſt.

DEMONSTRATIO: Numeri in tabulis ſibi proximi differunt unitate; ſenſus ergo inſtitutæ proportionis eſt iſte: differentia duorum logarithmorum tabularium dat differentiam numerorum iis reſpondentium = 1: quam numerorum differentiam dabit differentia logarithmi tabularis a dato? Invenitur ergo pars numero minoris logarithmi addenda. Cum vero prima differentia neceſſario ſit major altera, patet ex dictis de decimalibus (85) poſſe inveniri quotcunque decimales.

220. PROBLEMA. *Invenire numerum reſpondentem logarithmo, cujus characteriſtica eſt major omnibus tabularibus.*

RESOLUTIO: Sit logarithmus 6.6596310. Cum in tabulis minoribus maxima characteriſtica ſit 3.; a dato logarithmo, ſubtrahe logarithmum 3.0000000, qui reſpondet numero 1000. Quære reſiduum 3.6596310 in tabulis; invenies numerum reſpondentem = 4567, quem multiplica per 1000, habebis numerum dato logarithmo reſpondentem = 4567000. Quodſi datus logarithmus fuerit 6.6597160, qui imminuta characteriſtica ut prius, fiet = 3.6597160, quique adcurate in tabulis non invenitur; tum ex problemate præcedente (219) quære tot notas decimales, quot zeri forent adjiciendi, ſcilicet tres; quæ

notæ

notæ inventæ jam non erunt decimales, ſed pars integrorum adjicienda numero; eritque in exemplo poſito numerus dato logarithmo reſpondens = 4567893.

Demonstratio. Dum logarithmus E. g. numeri 1000 = 3.0000000 ſubtrahitur e logarithmo dato, reſiduus eſt logarithmus quoti e numero dati logarithmi diviſo per 1000 (215): ergo hic quotus ductus in 1000 reſtituit numerum dati logarithmi.

221. PROBLEMA. *Invenire logarithmum numeri, cui adhæret fractio decimalis.*

Resolutio. Sit numerus 45. 67; quæratur logarithmus numeri integri 4567, qui erit = 3.6596310; e cujus characteriſtica ſubtrahantur tot unitates, quot fuerint decimales numeri, in noſtro caſu 2; erit 1.6596310 logarithmus quæſitus.

Demonstratio. Numerus 45.67 eſt numerus 4567 diviſus per 100; ergo logarithmus de 45.67, eſt idem, ac logarithmus de 4567, a quo ſubtractus eſt logarithmus de 100, qui eſt = 2.0000000 (215)

222. PROBLEMA. *Invenire logarithmum numeri majoris, quam ſint ii in tabulis.*

Resolutio. Sit numeri 4567893 quærendus logarithmus, cujus characteriſtica erit 6. (213). Cum characteriſtica in tabulis minoribus maxima ſit 3; ſeparentur a dextris numeri tot notæ, quot unitatibus characteriſtica numeri dati major eſt maxima tabulari, fiet in noſtro exemplo 4567.893. Quæratur in tabulis logarithmus reliquarum notarum 4567, qui erit = 3.6596310; ſubtrahatur hic a proxime majore, numeri ſcilicet 4568, qui invenitur = 3.6597261, erit differentia = 951. Differentia vero numerorum 4567893 & 4567000 eſt = 893. Fiat 1000: 893 = 951 : x, erit x = 849, quæ notæ addantur logarithmo numeri 4567, & reſtituatur debita characteriſtica, habebitur quæſitus logarithmus totius numeri = 6.6597159; qui ſola unitate differt a vero, qualis invenitur in tabulis maximis = 6.6597160. Quodſi e numero fuiſſet reſciſſa nota unica; primus proportionis terminus fuiſſet = 10; duæ ſi notæ eſſent ſeparatæ, primus terminus foret = 100 &c.

Demon-

DEMONSTRATIO. Fundatur in eo, quod differentia duorum contiguorum logarithmorum ferme ſit eadem ſub quavis characteriſtica. Unde proportio inſtituta ſic intelligitur: differentia numerorum 4567000 & 4568000 = 1000, eſt ad differentiam numerorum 4567893 & 4567000 = 893: ſicut differentia logarithmorum de prioribus numeris contiguis = 951, eſt ad differentiam logarithmorum de ultimis numeris; hæc ergo differentia inventa addita logarithmo minori dat quæſitum majorem. Quæ quidem in rigore vera non ſunt, in praxi tamen ordinaria ſatisfaciunt.

223. PROBLEMA. *Invenire logarithmum fractionis.*

RESOLUTIO. *Regula I.* Si fractio eſt propria, E. g. $\frac{3}{4}$. ſubtracto logarithmo denominatoris ex illo numeratoris, erit reſiduus logarithmus quæſitus. Cum autem denominatoris logarithmus ſemper major ſit illo numeratoris, patet reipſa logarithmum numeratoris ex illo denominatoris eſſe ſubtrahendum, & reſiduus erit logarithmus quæſitus cum ſigno —. E. g. logarithmus numeri 3 eſt = 0.4771213. numeri 4 = 0.6020600: ergo fractionis $\frac{3}{4}$ logarithmus erit — 0.1249387; cum vero unitatis logarithmus ſit 0.0000000, erit fractionis, cujus numerator eſt unitas, logarithmus idem, qui eſt denominatoris, ſed cum ſigno —.

Regula II. Si fractio eſt decimalis, ſine integro, E. g. 0.23, mutetur in vulgarem propriam $\frac{23}{100}$; cujus logarithmus invenitur ex præcedente regula.

Regula III. Si fractioni propriæ vulgari adhæreat integer, is mutetur in fractionem ſpuriam ejusdem nominis; fiet E. g. $3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$. Habebitur ergo ejus logarithmus poſitivus, ſi denominatoris 3 logarithmus ſubtrahatur ex illo numeratoris 11.

DEMONSTRATIO colligitur ex dictis (215). Eſt enim quævis fractio quotus ex diviſione numeratoris per denominatorem.

224. PROBLEMA. *Invenire fractionem reſpondentem logarithmo negativo.*

RESOLUTIO. Quæratur numerus reſpondens dato logarithmo ceu poſitivo; is numerus erit denominator fractionis quæſitæ, cujus numerator erit unitas.

DEMONSTRATIO manifesta est ex Regula I. præcedentis problematis (223).

APPENDIX.

De combinatione & permutatione.

225. DEFINITIO. *Combinatio* est conjunctio rerum datarum in binas, ternas, quaternas &c. quoties fieri potest. *Permutatio* est rerum datarum repetita positio, quoties mutato rerum ordine fieri potest.

226. PROBLEMA. *Invenire omnes combinationes rerum quotcunque datarum.*

RESOLUTIO. *Regula I.* Elevetur binonium $a+b$ (99) ad eam potentiam, cujus exponens maximus sit ipse numerus rerum permutandarum: litera tamen b, nullius hic usus, omitti poterit. Erit ergo pro rebus E. g. 5 combinandis formula $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a^1$.

Regula II. Exponentes de a indicant, quales fieri possint combinationes. E. g. a^5 ostendit combinationes rerum quinque in *quinarios*: a^4 earundem rerum combinationes in *quaternarios* &c.

Regula II. Coëfficientes de a indicant singularum combinationum numerum. E. g. $1a^5$ ostendit, res quinque combinari in unum quinarium: $5a^4$, eas res combinari in 5 quaternarios: $10a^3$ in decem ternarios: $10a^2$ in decem binarios: $5a^1$, ostendit res singulas singillatim positas, ubi proprie combinatio non est. Quodsi numerus rerum combinandarum sit $= m$, erit numerus universarum combnationum propriarum, exclusis rebus singulis, $= 2^m - m - 1$. Ergo omnes combinationes 24 literarum alphabeti erunt $= 16776191$. Demonstrantur hæc ab iis, qui de altiorum potentiarum genesi tractant. Sic si inquiras in combinationes numerorum 90, invenies, ceteris omissis, Quaternarios 2555190: Ternarios 117480. Binarios 4005.

227. PROBLEMA *Invenire numerum permutationum in rebus quotcunque datis.*

RESOLUTIO. Res duæ E. g. a, b, bis possunt permutari, scilicet ab & ba. Si res tertia E. g. c accedat, poterit in quavis priore duarum permutatione occupare locum primum, medium & tertium, scilicet cab, acb, abc, cba,

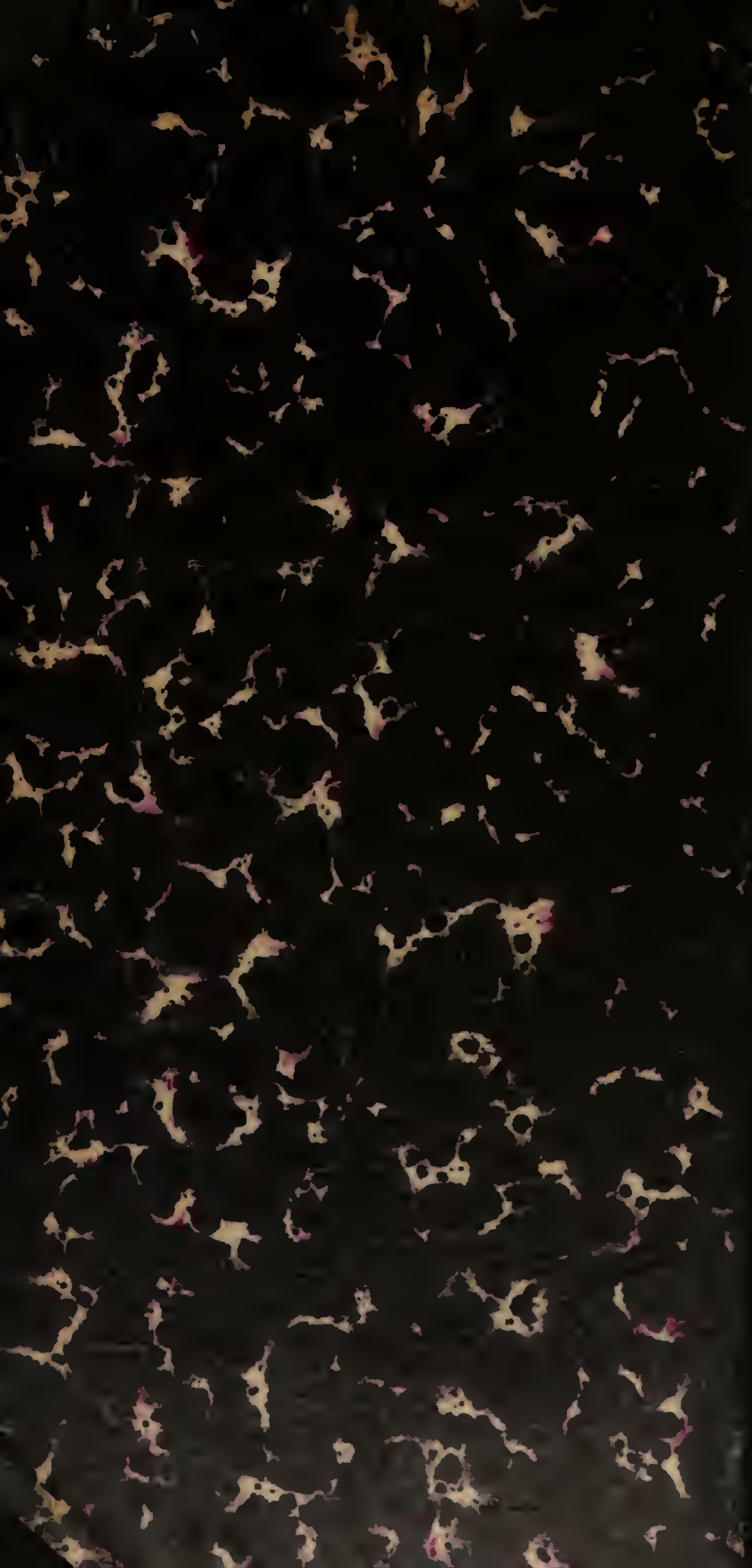
aba, *bca*, *baa*; unde rerum trium fieri poſſunt permutationes ſex. Si res quarta acceſſerit, ea poterit in præcedentibus ſex permutationibus primo, ſecundo, tertio & quarto loco, id eſt quater in quavis, ſeu univerſim vigeſies & quater poni. Si ita perrexeris, invenies ſequentem legem: rerum duarum permutationes ſunt = 1.2, rerum trium = 1.2.3. rerum quatuor = 1.2.4, rerum quinque = 1.2.3.4.5, & ſic porro. Si res ſemper fuerint diverſæ, *permutationes propriæ* erunt. Quodſi in numero rerum fuerit eadem bis; jam propriæ permutationes pauciores erunt; ſcilicet duarum rerum E. g. *a* & *a*, unica: trium rerum E. g. *a*, *a*, *b*, tres, nempe *aab*, *aba*, *baa*: quatuor rerum duodecim, cum quarta in ſingulis tribus ultimis poſſit occupare locum primum, ſecundum, tertium & quartum. Si porro ita ratiocinatus fueris, invenies, ſi inter res datas duæ ſint eædem, fore numerum permutationum propriarum his formulis comprehenſum: rerum duarum permutationes = $\frac{1.2}{2}$, rerum trium = $\frac{1.2.3}{2}$, rerum quatuor = $\frac{1.2.3.4}{2}$ & ita deinceps. Quando vero inter res datas eadem ter fuerit; erit, conſiderando omnia, uti in prioribus, erit inquam numerus permutationum ſequentibus formulis expreſſus: rerum trium E. g. *aaa*, = $\frac{1.2.3.}{2.3}$; rerum quatuor E. g. *aaab* = $\frac{1.2.3.4}{2.3}$, rerum quinque E. g. *aaabc* = $\frac{1.2.3.4.5}{2.3}$; & ſic deinceps. Eodem modo, ſi eadem fuerit quater inter res datas, erunt permutationes, rerum quatuor *aaaa* = $\frac{1.2.3.4}{2.3.4}$: rerum quinque *aaaab* = $\frac{1.2.3.4.5}{2.3.4}$ &c. Ex quibus jam facile reliquæ omnes formulæ, pro quovis rerum quarumcunque numero, conficientur. Mirum E. g. eſt, quantus ſit numerus permutationum literarum 24 alphabeti: ſcilicet 620448401733219439360000.

BIBLIOTHECA CIVICA ... Addi...

THEOREMA. *In progreſſione geometrica eſt terminus primus ad ultimum : ſicut primus elevatus ad potentiam unitate minorem, numero terminorum, eſt ad ſecundum elevatum ad eandem potentiam.* Sive eſt $a : z = a^{n-1} : b^{n-1}$.

DEMONSTRATIO. Prior proportio ita poteſt exprimi: $a : a\,q^{n-1} :: a^{n-1} : a^{n-1}\,q^{n-1}$; quæ ob eundem exponentem q^{n-1} vera eſt.

PROBLEMA. *Inter duos datos a, z, invenire quotvis medios proportionales.*

RESOLUTIO. Cum detur numerus terminorum n; fiat $n : z = a^{n-1} : x^{n-1}$; invenietur terminus ſecundus $x = \sqrt[n-1]{a^{n-2}\,z}$: ex quo habentur reliqui medii. Vide (210)

Pag.	*Linea.*	*Errata.*	*Correcta.*
17.	27.	dant × - - - - - - -	dant +
22.	13.	c+b...c−b - - - - -	a+b...a−b
25.	34.	factione - - - - - -	fractione
26.	15.	*poſt* $\frac{anpq}{mnpq}$ - - - -	*adde* $\frac{bmpq}{mnpq}$,
27.	7.	(61) - - - - - - - -	(43).
27.	18.	eum - - - - - - - -	eam
51.	31.	membrit - - - - - - -	membrum.
68.	26.	*Si duæ* - - - - - -	*Si duæ, vel plures.*